УДК: 534.138
OECD: 01.03.AA

Ячеечные модели концентрированных эмульсий сферических капель

Казаков Л.И.
К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичёва ДВО РАН, г. Владивосток, РФ

Аннотация

Рассмотрены в линейном приближении гармонические вынужденные колебания вязких капель в вязкой несжимаемой жидкости в условиях стесненного обтекания в ячеечной монодисперсной модели эмульсии под действием переменных массовых сил, сил поверхностного натяжения и осцилляций вмещающей жидкости. Учтены только вязкие потери. Изучено поведение пробной капли в ячейке с жесткой невесомой сферической оболочкой. На этой основе путем поочередного задания эвристических граничных условий Квашнина, Хаппеля и Кувабары на воображаемой сферической поверхности ячейки получены решения для этих трех вариантов эмульсии. Найдены низко- и высокочастотные приближения. Последние справедливы для всех четырех разновидностей эмульсий. При малой концентрации из них следуют разные частные случаи движения одиночной капли в жидкости, например, формулы Рыбчинского-Адамара, Кёнига и другие. Для произвольных концентраций капель получены общие формулы для комплексной плотности вариантов моделей эмульсий при распространении в них звуковых колебаний.

Ключевые слова: концентрированные эмульсии, гармонические колебания, вязкие потери, ячеечные модели, граничные условия, комплексная плотность.

Cellular models of concentrated emulsions of spherical drops

Kazakov L.I.
PhD, leading researcher, Pacific Oceanological Institute named after V. I. Il'ichev FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract

Harmonic forced oscillations of viscous droplets in a viscous incompressible liquid under conditions of constrained flow in a monodisperse cell model of an emulsion under the action of variable mass forces, surface tension forces, and oscillations of external liquid are considered in a linear approximation. Only viscous losses are taken into account. The behavior of a test drop in a cell with a rigid weightless spherical shell is studied. On this basis, by alternately setting the heuristic boundary conditions of Kvashnin, Happel, and Kuvabara on an imaginary spherical cell surface, solutions for these three emulsion variants are obtained. Low-and high-frequency approximations are found. The latter are true for all four types of emulsions. At a low concentration, they are followed by various special cases of the movement of a single drop in a liquid, for example, the Rybchinsky-Hadamard, Koenig, and others formulas. For arbitrary droplet concentrations, general formulas are obtained for the complex density of variants of emulsion models when sound vibrations propagate in them.

Keywords: *concentrated emulsions, harmonic oscillations, viscous losses, cell models, boundary conditions, complex density.*

Email: lev-kazakov@rambler.ru (Казаков Л.И.)

Введение

Большинство известных теоретических работ по распространению звука в дисперсных средах (например, [1–4]) относится к средам с малыми объемными концентрациями взвешенных частиц, не превышающими нескольких процентов, когда большие расстояния между частицами позволяют считать их обособленными и невзаимодействующими друг с другом. Эксперимент обычно подтверждает теорию при концентрации частиц до 9%. Далее происходит резкое их расхождение [2]. Однако работ, исследующих концентрированные дисперсные среды, гораздо меньше (например, [5–9]).

Наиболее адекватной моделью для описания дисперсных сред произвольных концентраций является ячеечная модель. Но она имеет крупные недостатки: 1) применимость лишь к монодисперсным средам, когда все включения одинаковы по размерам, форме и свойствам; 2) упорядоченность структуры, не характерная для реальных сред; 3) неопределенность требуемых граничных условий на поверхности ячейки, которые неизвестно как задавать. Обычно используют следующие найденные эвристическим путем граничные условия: жесткая оболочка ячейки [10, с.152, 518]; условие Квашнина [11, с.154]; условие Хаппеля [10, с.447]; условие Кувабары [10, с.450].

Рассмотрим поступательные гармонические колебания капли в окружении подвижной жесткой оболочки, либо других таких же капель, под действием переменных массовых сил, сил поверхностного натяжения и осцилляций внешней жидкости. Обе жидкости будем считать вязкими, несжимаемыми и ограничимся линейным приближением уравнения Навье–Стокса. Капиллярное давление предположим настолько большим, что при колебаниях капля сохраняет сферическую форму. Будем учитывать только вязкие потери энергии, пренебрегая тепловыми. Сначала решим задачу о колебаниях капли, помещенной в центр жесткой сферической оболочки. Затем будут исследованы колебания собственно ячеечных моделей монодисперсной системы капель [10] при трех указанных выше вариантах граничных условий на поверхности ячейки.

1. Жесткая оболочка ячейки

Исходные уравнения гармонических колебаний в записи для внешней жидкости имеют вид (опускаемый временной множитель - $e^{-i\omega t}$) [12, с.73]:

$$-i\omega\rho\overrightarrow{\nu} = \rho\overrightarrow{F} - \nabla P + \eta\Delta\overrightarrow{\nu}, \qquad div\overrightarrow{\nu} = 0, \tag{1.1}$$

где ω - циклическая частота; ρ и η - плотность и вязкость жидкости; P - комплексная амплитуда давления; $\overrightarrow{\nu}$ и $\overrightarrow{F}$ - амплитуды, соответственно, колебательной скорости и внешней силы, действующей на единицу массы жидкости. В аналогичных уравнениях для внутренней области величины, характеризующие свойства и движение жидкости в капле, снабдим штрихами.

Обозначим амплитуды колебательных скоростей капли как целого и жесткой оболочки относительно неподвижной системы координат, соответственно, через $\overrightarrow{U}$ и $\overrightarrow{V}$, считая $\overrightarrow{V}$ заданной. Векторы $\overrightarrow{U}$,$\overrightarrow{V}$ и $\overrightarrow{F}$ будем полагать направленными вдоль полярной оси сферической системы координат, начало которой совмещено с центром колеблющейся капли. Такая система отсчета неинерциальна, поэтому в ней следует учесть действие массовых сил инерции, записав

$$\overrightarrow{F} = -\frac{d\overrightarrow{U}}{dt} + \overrightarrow{G} = i\omega\overrightarrow{U} + \overrightarrow{G}, \tag{1.2}$$

где $\overrightarrow{G}$ - ускорение от возможных "обычных" массовых сил.

В принятой системе координат на внутренней поверхности оболочки радиуса R_1 и на поверхности капли радиуса R должны выполняться следующие кинематические и динамические граничные условия:

$$\begin{gathered}
\nu_r(R_1,\theta) = (V-U)\cos\theta, \qquad \nu_\theta(R_1,\theta) = (U-V)\sin\theta,\\
\nu_r(R,\theta) = \nu'_r(R,\theta) = 0, \qquad \nu_\theta(R,\theta) = \nu'_\theta(R,\theta),\\
-P(R,\theta) + 2\eta(\tfrac{\partial\nu_r}{\partial r})_{r=R} - \tfrac{2}{R}(A+B\nu_0)\cos\theta = -P'(R,\theta) + 2\eta'\left(\tfrac{\partial\nu'_r}{\partial r}\right)_{r=R},\\
\eta\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial\nu_r}{\partial\theta} + \tfrac{\partial\nu_\theta}{\partial r} - \tfrac{\nu_\theta}{r}\right)_{r=R} - \tfrac{1}{R}(A+B\nu_0)\sin\theta = \eta'\left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial\nu'_r}{\partial\theta} + \tfrac{\partial\nu'_\theta}{\partial r} - \tfrac{\nu'_\theta}{r}\right)_{r=R},
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где θ - полярный угол. Здесь первая пара условий означает, что оболочка с прилегающей к ней жидкостью движется относительно капли со скоростью $(\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U})$. Следующие два требования - это обращение в нуль нормальных и равенство тангенциальных скоростей жидкостей на поверхности неподвижной в целом и недеформируемой капли. В динамических граничных условиях величина $A + B\nu_0$ характеризует переменную вдоль границы раздела жидкостей часть поверхностного натяжения $\alpha(\theta)$ согласно соотношению

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 + (A+B\nu_0)\cos\theta, \qquad \alpha_0 = const, \tag{1.4}$$

где $\nu_0 = \nu_\theta(R,\pi/2)$ - тангенциальная скорость жидкостей на экваторе капли; значения величин A и B должны быть найдены отдельно, при рассмотрении конкретного механизма изменения поверхностного натяжения. При этом может оказаться, что $A = 0$, а $B \neq 0$, как, например, в случае заряженных жидкометаллических капель в растворе электролита в отсутствие электрического поля [7].

Учитывая осесимметричность задачи, решение уравнений движения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), будем искать в виде [13, с.397]

$$\begin{gathered}
\nu_r = f(r)\cos\theta, \qquad \nu_\theta = \varphi(r)\sin\theta, \qquad P = \eta\left[\psi(r) + \tfrac{\rho F}{\eta}r\right]\cos\theta,\\
\nu'_r = f'(r)\cos\theta, \qquad \nu'_\theta = \varphi'(r)\sin\theta, \qquad P' = \eta'\left[\psi'(r) + \tfrac{\rho' F}{\eta'}r\right]\cos\theta,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$F = i\omega U + G. \tag{1.6}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1.1) приведет к системе дифференциальных уравнений относительно функций $f(r), \varphi(r), \psi(r)$, решив которую найдем [7]:

$$\begin{gathered}
f(r) = C_1\tfrac{i\kappa r-1}{(i\kappa r)^3}e^{i\kappa r} + C_2\tfrac{i\kappa r+1}{(i\kappa r)^3}e^{-i\kappa r} + b_1\tfrac{R^3}{r^3} + b_2,\\
\varphi(r) = -\tfrac{C_1}{2}\tfrac{1-i\kappa r+(i\kappa r)^2}{(i\kappa r)^3}e^{i\kappa r} + \tfrac{C_2}{2}\tfrac{1+i\kappa r+(i\kappa r)^2}{(i\kappa r)^3}e^{-i\kappa r} + b_1\tfrac{R^3}{2r^3} - b_2,\\
\psi(r) = b_1\tfrac{(i\kappa)^2R^3}{2r^2} - b_2(i\kappa)^2 r,
\end{gathered} \tag{1.7}$$

где $C_{1,2}, b_{1,2}$ - неопределенные постоянные; $\kappa = \sqrt{\frac{i\omega\rho}{\eta}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta}}$ - волновое число сдвиговых волн внешней жидкости.

В формулах (1.7) для функций $f'(r), \varphi'(r), \psi'(r)$ следует положить $b'_1 = 0, C'_1 = C'_2$, чтобы устранить расходимости в начале координат. В результате получим:

$$\begin{gathered}
f'(r) = \tfrac{2C'_1}{(\kappa' r)^3}(\sin\kappa' r - \kappa' r\cos\kappa' r) + b'_2,\\
\varphi'(r) = \tfrac{C'_1}{(\kappa' r)^3}\left\{[1-(\kappa' r)^2]\sin\kappa' r - \kappa' r\cos\kappa' r\right\} - b'_2,\\
\psi'(r) = -b'_2(i\kappa')^2 r,
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\kappa' = \sqrt{\frac{i\omega\rho'}{\eta'}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\rho'}{2\eta'}}$ - волновое число сдвиговых волн жидкости капли.

Подставив выражения (1.5), (1.7), (1.8) в граничные условия (1.3), придем к системе из восьми уравнений относительно неопределенных постоянных $C_1, C_2, b_1, b_2, C_1', b_2'$ и искомых скоростей U и ν_0, которую упростим до системы двух уравнений относительно C_1 и C_2:

$$[2\eta D(y) + 3\eta_*'] \, w(-y)\frac{C_1}{y^3} - [2\eta D(-y) + 3\eta_*'] \, w(y)\frac{C_2}{y^3} = \frac{2}{3}A + (2\eta + 3\eta_*')b_1, \tag{1.9}$$

$$w(-z)\frac{C_1}{y^3} - w(z)\frac{C_2}{y^3} = b_1, \tag{1.10}$$

где

$$D(y) = \frac{1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}}{1 - y + \frac{y^2}{3}},$$

$$3\eta_*' = 3\eta' Q(x) + B,$$

$$Q(x) = \frac{(6 - x^2)x\cos x - (6 - 3x^2)\sin x}{3\left[(3 - x^2)\sin x - 3x\cos x\right]},$$

$$w(y) = \left(1 + y + \frac{y^2}{3}\right)e^{-y}, \tag{1.11}$$

$$b_1 = \frac{2(\rho' - \rho)FR^2}{3\eta y^2}, \tag{1.12}$$

$$x = \kappa' R, \qquad y = i\kappa R, \qquad z = i\kappa R_1. \tag{1.13}$$

Решение системы уравнений (1.9), (1.10) дает:

$$\frac{C_{1,2}}{y^3} = \frac{\left\{2\eta\left[w(\pm z) - D(\mp y)w(\pm y)\right] + 3\eta_*'\left[w(\pm z) - w(\pm y)\right]\right\}b_1 + \frac{2}{3}w(\pm z)A}{2\eta\left[D(y)w(z)w(-y) - D(-y)w(-z)w(y)\right] + 3\eta_*'\left[w(z)w(-y) - w(-z)w(y)\right]}, \tag{1.14}$$

где в числителе верхние знаки при аргументах y и z функций w и D относятся к C_1, а нижние – к C_2.

Зная b_1, C_1, C_2 найдем значения остальных неизвестных и в первую очередь скоростей

$$\nu_0 = -\frac{3}{2}\left[w(-y)\frac{C_1}{y^3} - w(y)\frac{C_2}{y^3} - b_1\right], \tag{1.15}$$

$$U = -\frac{C_1}{y^3}\left[(1-y)e^{y} - (1-z)e^{z}\xi^3\right] + \frac{C_2}{y^3}\left[(1+y)e^{-y} - (1+z)e^{-z}\xi^3\right] + (1-\xi^3)b_1 + V, \tag{1.16}$$

где

$$\xi = \frac{R}{R_1}. \tag{1.17}$$

2. Ячеечные модели эмульсий

Представим эмульсию из одинаковых капель в виде упорядоченной структуры ячеек типа гексагональной плотнейшей упаковки. Каждая капля находится в центре элементарной ячейки в окружении вмещающей жидкости. Гидродинамическое и тепловое взаимодействие капли с соседними каплями осуществляется через воображаемую внешнюю границу ячейки, приближенно аппроксимируемую сферической поверхностью радиуса R_1. Этот радиус выбирают так, чтобы величина ξ^3 совпала с объемной концентрацией капель в эмульсии. Таким образом, свойства эмульсии определяет поведение пробной капли в ячейке.

Задача о движении капли в ячеечной модели аналогична рассмотренной задаче о ячейке с жесткой оболочкой. Разница лишь в задании иных граничных условий на поверхности ячейки. Как это сделать точно неизвестно, хотя бы потому, что не определена и сама граница. А она, конечно, много сложнее, чем приближенно замещающая ее простая сферическая поверхность. Поэтому задание точных условий вряд ли возможно и приходится пробовать разные более или менее правдоподобные варианты для сферической поверхности ячейки. На поверхности же капли граничные условия остаются прежними. Будем считать, что в полюсах ячейки (при $\theta = 0, \pi$) скорость внешней жидкости задана и равна V в неподвижной системе координат. Тогда единственным граничным условием, подлежащим замене, оказывается условие для тангенциальной скорости жидкости на границе ячейки.

Сначала предположим, что на поверхности ячейки выполняется условие **Квашнина**

$$\frac{\partial \nu_\theta}{\partial r} = 0, \qquad \text{или} \qquad \left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=R_1} = 0, \tag{2.1}$$

т.е. минимум тангенциальной скорости по радиальной координате. По-видимому, это имеет место, по крайней мере, в двенадцати точках сферической поверхности ячейки - там, где она соприкасается с ближайшими соседними ячейками. Дифференцируя функцию $\varphi(r)$ из (1.7), убедимся, что условие (2.1) может быть записано в виде

$$w_1(-z)\frac{C_1}{y^3} - w_1(z)\frac{C_2}{y^3} = b_1, \tag{2.2}$$

где

$$w_1(z) = \left[1 + z + \frac{z^2}{3} + \frac{z^2}{3}(1+z)\right] e^{-z}. \tag{2.3}$$

Формула (2.2) заменяет аналогичное выражение (1.10) и совместно с уравнением (1.9) позволяет определить постоянные C_1 и C_2 формулами (1.14) с той только разницей, что в них $w(z)$ нужно заменить на $w_1(z)$ по формуле (2.3). Дальнейшие вычисления проводятся так же, как и в случае с жесткой оболочкой.

Рассмотрим теперь условие **Хаппеля**. Оно состоит в требовании, чтобы на границе ячейки обращались в нуль касательные напряжения

$$\sigma_{\theta r} = \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \nu_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \nu_\theta}{\partial r} - \frac{\nu_\theta}{r}\right)\bigg|_{r=R_1} = 0,$$

или

$$\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=R_1} - \frac{f(R_1) + \varphi(R_1)}{R_1} = 0. \tag{2.4}$$

Используя соотношения (1.7), представим (2.4) в виде

$$w_2(-z)\frac{C_1}{y^3} - w_2(z)\frac{C_2}{y^3} = b_1, \tag{2.5}$$

где

$$w_2(z) = \left[1 + z + \frac{z^2}{3} + \frac{z^2}{6}(1+z)\right] e^{-z}. \tag{2.6}$$

Сравнивая выражения (2.5) и (1.10), видим, что теперь в формулах (1.14) для C_1 и C_2 нужно заменить $w(z)$ на $w_2(z)$ по формуле (2.6).

Условие **Кувабары** постулирует отсутствие завихренности течения на границе ячейки $rot\overrightarrow{\nu}(R_1,\theta) = 0$, или

$$\left(\frac{\partial \nu_\theta}{\partial r} + \frac{\nu_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \nu_r}{\partial \theta}\right)\bigg|_{r=R_1} = 0.$$

Отсюда по (1.7) найдем:

$$\frac{d\varphi}{dr}\bigg|_{r=R_1} + \frac{f(R_1) + \varphi(R_1)}{R_1} = 0$$

и

$$C_1(1-z)e^z = C_2(1+z)e^{-z}.$$

Это заменяет уравнение (1.10). Выражения для C_1 и C_2 в данном случае можно получить из формул (1.14), если в них вместо $w(z)$ подставить

$$w_3(z) = (1+z)e^{-z},$$

а в числителях считать $w(y) = w(-y) = 0$.

Низкочастотные приближения для скоростей U и ν_0, справедливые при

$$\frac{|y^2|}{2} = \frac{\omega\rho R^2}{2\eta} << 1, \qquad \frac{|z^2|}{6} = \frac{\omega\rho R_1^2}{6\eta} << 1,$$

получены в виде

$$U = \frac{\frac{2(\rho'-\rho)R^2F}{3\eta}\left[\eta\varphi_n(\xi) + \eta'_*\varphi'_n(\xi)\right] - \frac{2}{3}A\alpha_n(\xi)}{2\eta\psi_n(\xi) + 3\eta'_*\psi'_n(\xi)} + V, \tag{2.7}$$

$$\nu_0 = \frac{\frac{(\rho'-\rho)R^2F}{3}\alpha_n(\xi) - A\psi'_n(\xi)}{2\eta\psi_n(\xi) + 3\eta'_*\psi'_n(\xi)}, \qquad n = 0,1,2,3. \tag{2.8}$$

Здесь индекс $n = 0$ относится к ячейке с жесткой оболочкой, $n = 1,2,3$ – к вариантам ячеечной модели в том порядке, как они рассмотрены выше. Функции аргумента ξ имеют вид:

$$\varphi_0(\xi) = 1 - \tfrac{3}{2}\xi + \tfrac{3}{2}\xi^5 - \xi^6,^{*)} \quad \varphi_0'(\xi) = 1 - \tfrac{9}{4}\xi + \tfrac{5}{2}\xi^3 - \tfrac{9}{4}\xi^5 + \xi^6,^{*)}$$
$$\psi_0(\xi) = 1 + \tfrac{3}{2}\xi^5,^{*)} \quad \psi_0'(\xi) = 1 - \xi^5,^{*)} \quad \alpha_0(\xi) = 1 - \tfrac{5}{2}\xi^3 + \tfrac{3}{2}\xi^5;$$
$$\varphi_1(\xi) = 1 - \tfrac{9}{8}\xi - \tfrac{3}{8}\xi^5 + \tfrac{1}{2}\xi^6, \quad \varphi_1'(\xi) = 1 - \tfrac{27}{16}\xi + \tfrac{5}{8}\xi^3 + \tfrac{9}{16}\xi^5 - \tfrac{1}{2}\xi^6,$$
$$\psi_1(\xi) = 1 - \tfrac{3}{8}\xi^5, \quad \psi_1'(\xi) = 1 + \tfrac{1}{4}\xi^5, \quad \alpha_1(\xi) = 1 - \tfrac{5}{8}\xi^3 - \tfrac{3}{8}\xi^5;$$
$$\varphi_2(\xi) = 1 - \xi - \xi^5 + \xi^6, \quad \varphi_2'(\xi) = 1 - \tfrac{3}{2}\xi + \tfrac{3}{2}\xi^5 - \xi^6,^{*)}$$
$$\psi_2(\xi) = 1 - \xi^5, \quad \psi_2'(\xi) = 1 + \tfrac{2}{3}\xi^5,^{*)} \quad \alpha_2(\xi) = 1 - \xi^5;$$
$$\varphi_3(\xi) = 1 - \tfrac{6}{5}\xi + \tfrac{1}{5}\xi^6, \quad \varphi_3'(\xi) = 1 - \tfrac{9}{5}\xi + \xi^3 - \tfrac{1}{5}\xi^6,^{*)}$$
$$\psi_3(\xi) = 1, \quad \psi_3'(\xi) = 1,^{*)} \quad \alpha_3(\xi) = 1 - \xi^3;$$

Отмеченные выражения совпадают с известными результатами предшествующих работ по стационарным течениям в ячеечных моделях [10, с. 155, 156, 449]. Эти функции связаны соотношением

$$3\varphi_n(\xi)\psi_n'(\xi) = 2\varphi_n'(\xi)\psi_n(\xi) + \alpha_n^2(\xi), \tag{2.9}$$

которое выводится следующим образом. Зададим величину A такой, чтобы числитель формулы (2.8) обратился в нуль, т.е. чтобы поверхность капли оказалась заторможенной. Такая капля будет неотличима от твердой сферы, и колебательную скорость ее центра масс U можно вычислить по формуле (2.7), либо подставив в нее заданное значение A, либо положив формально $\eta_*' = \infty$. Из равенства полученных таким образом выражений для U следует соотношение (2.9). В его справедливости легко убедиться и непосредственной проверкой. Кроме того, имеет место равенство

$$2\psi_n(\xi) + 3\psi_n'(\xi) = 5.$$

Высокочастотные приближения для скоростей U и ν_0 справедливые при выполнении условия

$$|z| = \sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}}R_1 \geq \frac{3\sqrt{2}(1-\ln\xi)}{1-\xi},$$

даются следующими едиными для рассмотренных 4-х моделей стесненного обтекания капель формулами:

$$U = \frac{\frac{2(\rho'-\rho)R^2G}{3\eta}\left[\eta S(y) + \eta_*' S'(y)\right] - \frac{2}{3}A(1-y) + V\left(1 - y + \frac{y^2}{3}\right)\left[2\eta D(y) + 3\eta_*'\right]}{2\eta T(y) + 3\eta_*' T'(y)}, \tag{2.10}$$

$$\nu_0 = \frac{\frac{(\rho'-\rho)R^2G}{3}(1-y) - AT'(y) - \frac{\eta(1-\gamma)}{2\gamma}(1-y)y^2V}{2\eta T(y) + 3\eta_*' T'(y)}, \tag{2.11}$$

где

$$S(y) = (1-\xi^3)\left(1 - \tfrac{y}{3}\right) + \tfrac{2\xi^3}{y}\left(1 - \tfrac{1}{y}\right), S'(y) = 1 - \xi^3 + \tfrac{3\xi^3}{y}\left(1 - \tfrac{1}{y}\right),$$
$$T(y) = \left[1 - \tfrac{(1-\gamma)\xi^3}{\gamma}\right](1-y) + \left[1 - (1-\gamma)\xi^3\right]\left(1 - \tfrac{y}{3}\right)\tfrac{y^2}{2\gamma},$$
$$T'(y) = \left[1 - \tfrac{(1-\gamma)\xi^3}{\gamma}\right](1-y) + \left[1 - (1-\gamma)\xi^3\right]\tfrac{y^2}{3\gamma},$$
$$\gamma = \tfrac{3\rho}{2\rho'+\rho},$$

причем имеет место соотношение

$$3S(y)T'(y) = 2S'(y)T(y) + (1-y)^2,$$

являющееся высокочастотным аналогом формулы (2.9).

Поверим приближения предельными переходами. При $\xi \to 0$ из (2.10) следует:

$$U = \frac{\frac{2(\rho'-\rho)R^2G}{3\eta}\left[\eta\left(1-\frac{y}{3}\right)+\eta'_*\right] - \frac{2}{3}A(1-y) + V\left(1-y+\frac{y^2}{3}\right)\left[2\eta D(y)+3\eta'_*\right]}{2\eta\left(1-y+\frac{y^2}{2\gamma}-\frac{y^3}{6\gamma}\right)+3\eta'_*\left(1-y+\frac{y^2}{3\gamma}\right)}, \tag{2.12}$$

Эта формула содержит разные частные случаи движения одиночной капли в жидкости. Так, для движения в покоящейся жидкости ($V=0$) с постоянной скоростью ($\omega, |y| \to 0$) в поле силы тяжести ($G=g$) получим

$$U = \frac{2(\rho'-\rho)gR^2}{9\eta}\frac{3\eta+3\eta'+B}{2\eta+3\eta'+B} - \frac{2A/3}{2\eta+3\eta'+B},$$

Если поверхность капли свободна от электрических зарядов, поверхностно-активных веществ и т.п., т.е. когда $\alpha(\theta) = \alpha_0 = const$ и, следовательно, $A=0, B=0$, то это выражение переходит в известную формулу Рыбчинского–Адамара [12, с. 100]. При $G=0, A=0, |\eta'_*| >> \eta$ из (2.12) следует:

$$\frac{U}{V} = \frac{1-y+\frac{y^2}{3}}{1-y+\frac{y^2}{3\gamma}}.$$

Это известная формула Кёнига (W.König, 1891 г.), полученная также в [1]. Она служит основой акустических теорий разбавленных суспензий.

Для маловязких капель, когда $|\eta'_*| << \eta, G=0, A=0$ по (2.12) получим:

$$\frac{U}{V} = \frac{1-y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}}{1-y+\frac{y^2}{2\gamma}-\frac{y^3}{6\gamma}}.$$

Как и в предыдущем случае, отношение амплитуд скоростей близко к единице при $|y| << 1$ и стремится к γ при $|y| >> 1$. Так, для газового пузырька в воде в поле звуковой волны достаточно высокой частоты $U/V \approx 3$.

С помощью (2.12) (при $A=0, V=0$) найдем силу сопротивления движению капли [14]:

$$F_{res} = -6\pi\eta RU\frac{2\eta\left(1-y+\frac{y^2}{6}-\frac{y^3}{18}\right)+3\eta'_*\left(1-y+\frac{y^2}{9}\right)}{3\eta\left(1-\frac{y}{3}\right)+3\eta'_*}.$$

Отсюда получим частные формулы для силы сопротивления движению в неподвижной на бесконечности жидкости капли, твердой сферы, газового пузырька [12]. Так, для твердой сферы ($\eta' \to \infty$) имеем

$$F_{res} = -6\pi\eta RU\left(1-y+\frac{y^2}{9}\right), \quad y^2 = -\frac{i\omega\rho R^2}{\eta},$$

что переходит в формулу Стокса при $\omega \to 0$, а при $\eta \to 0$ дает:

$$F_{res} = -\frac{2}{3}\pi R^3\rho(-i\omega U) = -\frac{2}{3}\pi R^3\rho\frac{dU}{dt},$$

что выражает известный результат: присоединенная масса идеальной жидкости для осциллирующей сферы равна половине массы жидкости, вытесненной сферой.

Когда плотности жидкостей в эмульсии разнятся, колебательные скорости U и V не совпадают, т.е. капля движется относительно вмещающей жидкости. При этом за счет вязкостей обеих жидкостей происходит частотнозависимая диссипация механической энергии. Для звуковой волны, длина которой значительно превышает размеры элементарной ячейки, эмульсия предстает "микронеоднородной" средой с эффективной комплексной плотностью [7,8]:

$$\widetilde{\rho}(\omega) = \widetilde{\rho_1}(\omega) + i\widetilde{\rho_2}(\omega) = \rho\left(1 + \frac{\rho' - \rho}{\rho}\xi^3\frac{U}{V}\right).$$

Отношения скоростей (при $G = 0, A = 0$) представим в виде

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 - iq_n}, n = 0, 1, 2, 3.$$

Для четырех рассмотренных выше вариантов ячеечных моделей эмульсий получены полные выражения функций q_n. Случай жесткой оболочки подробно рассмотрен в работе [8]. Для собственно ячеистых моделей имеем: при условии **Квашнина**

$$q_1 = \frac{2(\rho'-\rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{3\eta\{-\frac{4}{3}z\xi+[z(1-\xi+\frac{4}{3}\xi^2)+\frac{z^3}{3}(1-\frac{2}{3}\xi-\xi^3+\frac{2}{3}\xi^4)]ch[z(1-\xi)]-}{2\eta\{[z(1-\xi)+\frac{z^3}{6}(2-4\xi+3\xi^2-\xi^3)+\frac{z^5}{6}\xi^2(1-\frac{2}{3}\xi)]ch[z(1-\xi)]-}\cdots$$
$$\cdots\frac{-[1-\frac{4}{3}\xi+\frac{2z^2}{3}(1-\frac{\xi}{2}-\xi^3+\xi^4)-\frac{z^4}{9}(\xi-\xi^4)]sh[z(1-\xi)]\}+3\eta'_*\{-2z\xi+[z(1-\xi+2\xi^2)+}{-[1+z^2(\frac{2}{3}-\xi+\frac{\xi^2}{2})-\frac{z^4}{6}\xi(2-2\xi+\xi^2)-\frac{z^6}{18}\xi^3]sh[z(1-\xi)]\}+3\eta'_*\{[z(1-\xi)+\frac{z^3}{3}(1-\xi)^2+}$$
$$\cdots\frac{+\frac{z^3}{3}(1-\xi^3)]ch[z(1-\xi)]-[1-2\xi+\frac{z^2}{3}(2+3\xi^2-2\xi^3)]sh[z(1-\xi)]\}}{+\frac{z^5}{9}\xi^2]ch[z(1-\xi)]-[1+\frac{z^2}{3}(2-3\xi+\xi^2)-\frac{z^4}{9}\xi(3-2\xi)]sh[z(1-\xi)]\}};$$

при условии **Хаппеля**

$$q_2 = \frac{2(\rho'-\rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{3\eta\{-\frac{4}{3}z\xi+[z(1-\frac{2}{3}\xi+\xi^2)+\frac{z^3}{6}(1-\xi-\xi^3+\xi^4)]ch[z(1-\xi)]-}{2\eta\{[z(1-\xi)+\frac{z^3}{6}(1-\xi)^3+\frac{z^5}{12}\xi^2(1-\xi)]ch[z(1-\xi)]-[1+\frac{z^2}{2}(1-\xi)^2-}\cdots$$
$$\cdots\frac{-[1-\xi+\frac{z^2}{2}(1-\frac{2}{3}\xi+\frac{2}{3}\xi^2-\xi^3)-\frac{z^4}{18}\xi(1-\xi^3)]sh[z(1-\xi)]\}+3\eta'_*\{-2z\xi+[z(1-\frac{1}{2}\xi+\frac{3}{2}\xi^2)+}{-\frac{z^4}{6}(1-\frac{3}{2}\xi+\xi^2)-\frac{z^6}{36}\xi^3]sh[z(1-\xi)]\}+3\eta'_*\{[z(1-\xi)+\frac{z^3}{6}(1-3\xi+2\xi^2)+\frac{z^5}{18}\xi^2]ch[z(1-\xi)]-}\cdots$$
$$\cdots\frac{+\frac{z^3}{6}(1-\xi^3)]ch[z(1-\xi)]-[1-\frac{3}{2}\xi+\frac{z^2}{2}(1+\xi^2-\xi^3)]sh[z(1-\xi)]\}}{-[1+\frac{z^2}{6}(3-6\xi+2\xi^2)-\frac{z^4}{6}\xi(1-\xi)]sh[z(1-\xi)]\}};$$

при условии **Кувабары**

$$q_3 = \frac{2(\rho'-\rho)\omega R^2}{9\eta} \cdot \frac{3}{z^2} \cdot \frac{2\eta\{[-z\xi(1-\xi)+\frac{z^3}{6}(3-\xi)(1-\xi^3)]ch[z(1-\xi)]-}{2\eta\{[z(1-\xi)+\frac{z^3}{6}(3\xi^2-\xi^3)]ch[z(1-\xi)]-[1-\frac{z^2}{2}(2\xi-\xi^2)-}\cdots$$
$$\cdots\frac{-[-\xi+\frac{z^2}{2}(1+2\xi^2-\xi^3)-\frac{z^4}{6}\xi(1-\xi^3)]sh[z(1-\xi)]\}+3\eta'_*\{[-z\xi(1-\xi)+}{-\frac{z^4}{6}\xi^3]sh[z(1-\xi)]\}+3\eta'_*\{[z(1-\xi)+\frac{z^3}{3}\xi^2]ch[z(1-\xi)]-}\cdots$$
$$\cdots\frac{+\frac{z^3}{3}(1-\xi^3)]ch[z(1-\xi)]-[-\xi+\frac{z^2}{3}(1+3\xi^2-\xi^3)]sh[z(1-\xi)]\}}{-[1+\frac{z^2}{3}\xi(\xi-3)]sh[z(1-\xi)]\}}.$$

Учет силовых факторов G и A возможен, но громоздок.

Заключение

Приведены основные расчеты акустических характеристик ячеечных моделей эмульсий сферических капель произвольных концентраций. Рассмотрены четыре варианта известных граничных условий на поверхности ячейки. Получены низко- и высокочастотные приближения для характерных скоростей капли при гармонических колебаниях под действием массовых сил, переменных сил поверхностного натяжения и осцилляций вмещающей жидкости. К трем вариантам эмульсий даны полные формулы для расчета их комплексных эффективных плотностей в звуковом поле. Частные случаи этих формул для суспензий имеются в работе [9].

Поскольку многие жидкости имеют близкие значения плотностей, т.е. $\rho' \approx \rho$ то вязкие звуковые потери в таких эмульсиях могут оказаться незначительными, что потребует учета и тепловых потерь, не зависящих от гидродинамических граничных условий на поверхности ячейки. Для расчета тепловых потерь необходимо использовать результаты работы [15], кратко изложенные в [8]. При этом комплексной будет также эффективная сжимаемость эмульсии.

Список литературы

1. Рытов С.М., Владимирский В.В., Галанин М.Д. Распространение звука в дисперсных системах // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 5. С. 614-621.

2. Urick R.J. The absorption of sound in suspensions of irregular particles // J. Acoust. Soc. Amer. 1948. V. 20. № 3. P. 283-289.

3. Epstain P.S., Carhart R.R. The absorption of sound in suspensions and emulsions. Water fog in air // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. V. 25. № 3. P. 553-565.

4. Ратинская И.А. О затухании звука в эмульсиях // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 210-215.

5. Нестеров В.С. Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 3. С. 337-344.

6. Федотовский В.С., Орлов А.И., Лунина С.В., Пильщикова Е.А. Комплексная плотность суспензий в колебательно-волновых процессах // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 173-178.

7. Казаков Л.И. Динамика капель в электрокапиллярных акустических преобразователях: Дис. … к.ф.-м.н. Владивосток, 1985. 114 с.

8. Казаков Л.И. О распространении звука в дисперсных средах //Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 330-341.

9. Казаков Л.И. Ячеечные модели суспензий сферических частиц при разных граничных условиях // NOISE Theory and Practice. 2019. Т. 5. № 4. С. 27-40.

10. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Пер. с англ. под ред. Буевича Ю. А. М.: Мир, 1976. 630 с.

11. Квашнин А.Г. Об одной ячеечной модели суспензии сферических частиц // Изв. АН СССР, МЖГ. 1979. № 4. С. 154-157.

12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. 3-е изд. перераб. М.: Наука, 1986. 736 с.

13. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. дополн. и перераб. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.

14. Городцов В.А. Медленные движения жидкой капли в вязкой жидкости // Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1975. №6. С. 32-37.

15. Бызова Н.Л., Нестеров В.С. Термическое затухание звука в суспензии высокой концентрации // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 4. С. 408-414.

References

1. S. M. Rytov, V. V. Vladimirsky, M. D. Galanin. Sound propagation in dispersive systems. Zh. Eksp. Teor. Fis.1938. Vol. 8. No. 5. pp. 614-621.

2. R. J. Urick. The absorption of sound in suspensions of irregular particles / / J. Acoust. Soc. Amer. 1948. V. 20. № 3. P. 283-289.

3. P.S. Epstain, R.R. Carhart. The absorption of sound in suspensions and emulsions. Water fog in air // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. V. 25. No. 3. P. 553-565.

4. I. A. Ratinskaya. On the attenuation of sound in emulsions. Akust. Zh. 1962. Vol. 8. No. 2. Pp. 210-215.

5. V. S. Nesterov. Visco-inertial dispersion and sound attenuation in a high-concentration suspension // Akust. Zh. 1959. Vol. 5. No. 3. pp. 337-344.

6. V. S. Fedotovsky, A. I. Orlov, S. V. Lunina, E. A. Pilshchikova. Complex density of suspensions in vibrational-wave processes. Acoust.Phys. 2014. Vol. 60. no. 2. pp. 173-178.

7. L. I. Kazakov. Dynamics of drops in electrocapillary acoustic converters: Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Vladivostok, 1985).

8. L. I. Kazakov. On the propagation of sound in dispersive media //Acoust.Phys. 2018. Vol. 64. no. 3. pp. 330-341.

9. L. I. Kazakov. Cellular models of spherical particle suspensions under different boundary conditions / / NOISE Theory and Practice. 2019. Vol. 5. no. 4. pp. 27-40.

10. J. Happel and H. Brenner, Low Reynolds Number Hydrodynamics. With Special Applications to Particulate Media (Springer, 1983; Mir, Moscow, 1976).

11. A. G. Kvashnin. On a cellular model of a suspension of spherical particles. Izv. AN SSSR, MZhG. 1979. No. 4. pp. 154-157.

12. L. D. Landau, E. M. Lifshits. Hydrodynamics. 3rd ed. pererab. M.: Nauka, 1986. 736 p.

13. V. G. Levich. Physicochemical hydrodynamics. 2nd ed. M.: GIFML, 1959. 699 p.

14. V. A. Gorodtsov. Slow movements of a liquid drop in a viscous liquid. J. Appl. Mech. and Tech. Phys. 1975. No. 6. pp. 32-37.

15. N. L. Buzova, V. S. Nesterov. Thermal attenuation of sound in a high-density suspension concentrations // Akust. Zh. 1959. Vol. 5. No. 4. pp. 408-414.