

УДК: 534.222

OECD: 01.03.AA

DOI: 10.56408/2412-8627.2022.38.26.001

Акустические свойства многомодовых камерных звукоизоляторов в каналах

Алёшина М.А.¹, Кравчун П.Н.^{2*}

¹ Преподаватель физики, ГБОУ г. Москвы «Школа №2007 ФМШ»

² К.ф.-м.н., доцент, кафедры акустики, физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
^{1,2} г. Москва, РФ

Аннотация

Рассмотрены многомодовые звукоизоляторы в виде камер расширения в каналах, описаны их общие акустические свойства и физический механизм их звукоизолирующего действия. Показано, что в одномодовых системах такого типа существование полос непропускания принципиально невозможно, их формирование обусловлено исключительно модами первого и более высоких порядков. Предложен алгоритм решения задачи о нахождении акустического поля и других характеристик многомодовых камер расширения с патрубками (отрезками входного и выходного волноводов, вдвинутыми внутрь камеры). Рассмотрена схема ограничения порядка полученной системы уравнений, а также сходимость метода по числу учитываемых мод. Обсуждены основные акустические свойства камерных звукоизоляторов с патрубками и без них и возможности управления частотными характеристиками многомодовых камер при изменении параметров патрубков.

Ключевые слова: камеры расширения, многомодовые звукоизоляторы, многомодовые камеры с патрубками, уровни глушения.

Acoustic properties of multimode expansion chamber sound insulators in ducts

Aljoshina M.A.¹, Kravchun P.N.^{2}*

¹ *Lecturer in physics, School «Shkola №2007 FMSH»*

² *PhD, assistant professor, Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
^{1,2} Moscow, Russia*

Abstract

Multimode expansion chambers in ducts are considered, their general acoustic properties and physical sound-insulating mechanism of their action are described. It has been shown that in single-mode systems of this type, the existence of reject bands is fundamentally impossible, their formation is due solely to higher-order modes. An algorithm for solving the problem of finding the transmission loss and other characteristics of extended-tube expansion chambers is proposed. The scheme of limiting the order of the obtained system of equations is considered, as well as the convergence of the method with the number of modes taken into account. Main acoustic properties of chamber sound insulators with and without extended tubes and possibility to control frequency characteristics of multimode chambers by change of extended tubes parameters are discussed.

Keywords: *expansion chambers, multimode sound insulators, multimode extended-tube chambers, transmission loss.*

Введение

Звукоизолирующие системы в виде камер расширения, т.е. участков каналов с увеличенным поперечным сечением (рис. 1), и их цепочек являются одним из распространенных типов глушителей шума в каналах. С точки зрения практического использования такие системы имеют определенные преимущества перед традиционными звукопоглощающими устройствами благодаря простоте конструкции, малому весу, практически неограниченному ресурсу.

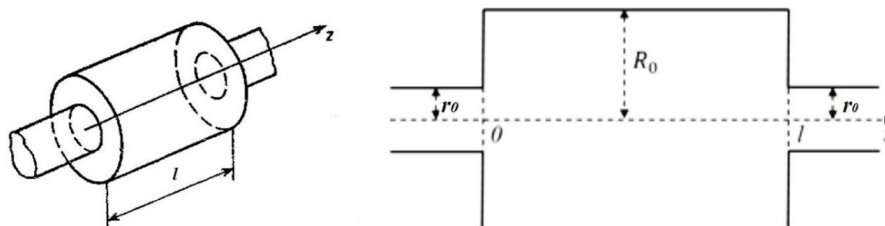


Рис. 1. Общий вид и осевое сечение камеры расширения

Камеры расширения принято делить на одномодовые (поперечные размеры которых существенно меньше длины волны), в которых распространяющейся является только нулевая (поршневая) мода, и многомодовые (поперечные размеры которых сравнимы с длиной волны или превышают ее), где распространяющимися являются также моды более высоких порядков. В данной работе основное внимание уделяется многомодовым камерам, в том числе с патрубками (отрезками входного и выходного волноводов, вдвинутыми внутрь камеры, см. рис. 2).

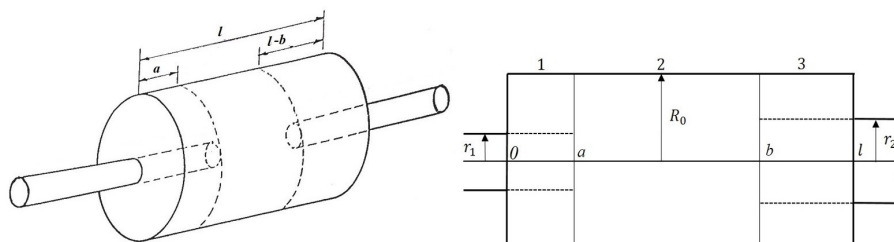


Рис. 2. Общий вид и осевое сечение камеры расширения с патрубками

Исследованиям многомодовых камер расширения посвящен ряд публикаций, в основном, расчетной направленности. Физические процессы в таких системах обсуждаются лишь в нескольких работах. К числу наиболее информативных относятся, на наш взгляд, публикации [1-8].

Впервые на важную роль нераспространяющихся мод в формировании звукового поля в ограниченных объемах на низких частотах указал У. Ингард [1, 2], исследовавший системы типа резонансных звукопоглотителей, однако в полной мере значение высших (в т.ч. нераспространяющихся) мод в многомодовых системах на тот момент выявлено не было.

Физический механизм звукоизоляции в многомодовых камерах расширения весьма детально изучен в [3, 4]. В частности, в [3] обнаружена определяющая роль т.н. «взаимной» присоединенной массы, возникающей благодаря нераспространяющимся модам и обусловленной взаимодействием полей во входном и выходном отверстиях камеры: высокая звукоизоляция в многомодовых камерах наблюдается на частотах, где взаимная присоединенная масса компенсируется упругим сопротивлением

распространяющихся мод. В [4] показано, что механизм звукоизоляции в многомодовых камерах принципиально отличается от случая одномодовых камер и заключается в нелокальной деструктивной интерференции полей распространяющихся и нераспространяющихся мод в объеме камеры. В [3, 4] обнаружено также, что наиболее широкая полоса глушения в многомодовых камерах наблюдается в случае равенства («вырождения») частот первого продольного и первого поперечного резонансов объема камеры.

Среди работ расчетного характера отметим [5-6], где приведены частотные характеристики различных вариантов многомодовых и одномодовых камер и предлагаются пути выбора оптимальных параметров камер. В [6] отмечается, что при увеличении диаметра камеры при фиксированной ее длине на частотах выше критической частоты первой моды уровень глушения камеры резко падает, что может быть интерпретировано как эффект «туннелирования» звуковой энергии за счет появляющихся в объеме камеры распространяющихся мод первого и более высокого порядков. Результаты расчетов в [6] подтвердили выводы работ [3, 4] о том, что наиболее широкая полоса глушения в многомодовых камерах соответствует случаю близости частот первого продольного и первого поперечного резонансов объема камеры. В [6] кратко рассмотрены также камеры с патрубками, причем обнаружено, что наличие патрубков, как правило, сильно усложняет частотную характеристику уровня глушения.

Весьма эффективная методика оптимизации реактивных глушителей шума, в т.ч. многомодовых камер расширения, предложена в [7].

В настоящей работе основное внимание уделено вопросам влияния нераспространяющихся мод на звукоизолирующее действие камер, в том числе на формирование полос непропускания в многомодовых камерных звукоизоляторах, а также алгоритму расчета камер расширения с патрубками и их акустическим свойствам. Для определенности будем считать, что рассматриваемые камеры имеют круглое поперечное сечение, стенки камер – жесткие, а волноводы на входе и выходе камер – одномодовые (это соответствует поршневому распределению колебательной скорости в них). Выбор конкретных геометрических параметров камер фактически не ограничивает общность результатов, т.к. рассматриваемой задаче присуща масштабная инвариантность (критерием подобия является отношение размеров к длине волны).

1. Основные акустические свойства многомодовых и одномодовых камер расширения

Обратимся сначала к акустическим особенностям одиночных многомодовых камер без патрубков. Будем рассматривать гармонический режим. Расчет камер удобно проводить, опираясь на матричные методы теории четырехполюсников. Из решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца можно получить выражение для матрицы акустических импедансов \hat{Z}_{ac} , связывающей комплексные амплитуды звукового давления и колебательной скорости на входе и выходе симметричной камеры (в которой расположение и радиусы входного и выходного отверстий одинаковы):

$$\hat{Z}_{ac} = 4i\rho c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k}{k_m} \cdot \frac{J_1^2(v_m r_0)}{(v_m R_0)^2 \cdot J_0^2(v_m R_0)} \begin{pmatrix} ctg(k_m l) & -\frac{1}{\sin(k_m l)} \\ \frac{1}{\sin(k_m l)} & -ctg(k_m l) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ρ – плотность среды, c – скорость звука, i – мнимая единица, $k = \omega/c$, ω – циклическая частота, l – длина камеры, $k_m = [(\omega/c)^2 - v_m^2]^{1/2}$ – продольное волновое число, v_m – корни уравнения $J_0(v_m R_0) = 0$, соответствующего граничному условию на жёсткой

боковой стенке камеры (равенство нулю нормальной составляющей колебательной скорости на стенке), R_0 – радиус поперечного сечения камеры, r_0 – радиус входного и выходного отверстий (отношение $g = r_0/R_0$ будем называть коэффициентом расширения камеры).

Приведенная матрица импедансов, зависящая только от внутренних параметров камеры, полностью определяет взаимодействие камеры с источником звуковой энергии и нагрузкой. В частности, она позволяет вычислить уровень глушения камеры, определяемый соотношением $TL = 10lg(\frac{I_{пад}}{I_{прош}})$, где $I_{прош}$ – интенсивность волны, прошедшей через камеру расширения в выходной волновод, $I_{пад}$ – интенсивность волны, падающей на входное сечение камеры из входного волновода.

Как было указано выше, наиболее широкая полоса эффективного глушения у многомодовой камеры наблюдается в случае близости частот первого продольного и первого поперечного резонансов объема камеры (равенство этих частот обычно называют «вырождением» низших собственных частот камеры, что для камеры круглого поперечного сечения соответствует отношению $R_0/l = 0,820$). На частотной характеристике уровня глушения TL в этом случае формируется достаточно широкая полоса глушения с двумя ярко выраженными максимумами («пиками»), один из которых расположен всегда ниже частоты вырождения, а второй – выше ее; уровни глушения могут достигать значений 15-20 дБ в полосе 1–1,5 октавы даже для одиночной камеры (рис. 3) (расчеты для рис. 3 и далее проведены для следующих параметров воздуха: $\rho = 1,29$ кг/м³, $c=343$ м/с, среда считается идеальной).

В [4, 8] показано, что теоретические расчеты уровня глушения многомодовых камер в целом хорошо подтверждаются данными эксперимента.

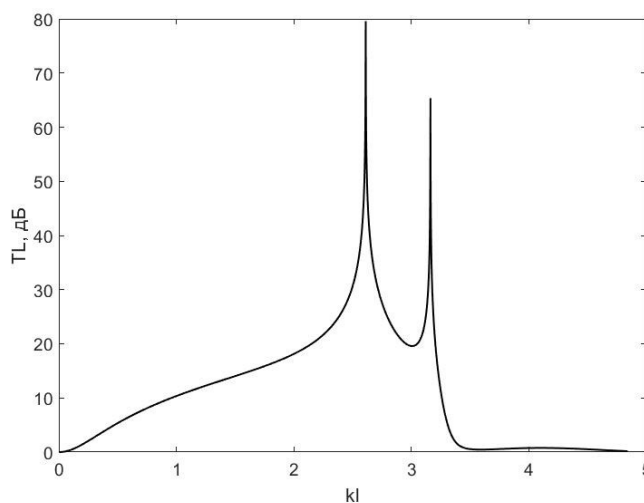


Рис. 3. Зависимость уровня глушения многомодовой камеры от волнового параметра kl .
 Параметры камеры: $l = 5,3$ см, $R_0 = 6,5$ см, $g = 0,385$

Максимумы уровня глушения многомодовой камеры соответствуют условию равенства нулю элементов Z_{12} и Z_{21} матрицы импедансов (1), т.е. условию резонанса «взаимного» импеданса камеры, обусловленного взаимодействием полей во входном и выходном отверстиях камеры. Теоретически в случае идеальной среды уровень глушения камеры на частотах резонансов взаимного импеданса стремится к бесконечности, влияние же диссипации делает его максимумы конечными. На частотах максимумов TL упругий взаимный импеданс распространяющихся в объеме камеры мод Z_K полностью компенсируется инерционным взаимным импедансом нераспространяющихся мод Z_M :

$Z_{21} = -Z_{12} = Z_K + Z_M = 0$. Если параметры камеры близки к случаю вырождения низших собственных частот, то на частотах между максимумами TL и несколько ниже их упругий импеданс Z_K близок по модулю к инерционному импедансу Z_M , благодаря чему и формируется широкая полоса эффективного глушения.

Рассмотрим, как изменяется частотная зависимость уровня глушения многомодовой камеры при изменении ее геометрических пропорций.

На рис. 4 показаны зависимости уровня глушения TL от волнового параметра kl для серии камер с различными коэффициентами расширения g , но с одинаковой длиной камер l . Из анализа зависимости следует, что расстояние между двумя пиками кривой TL увеличивается при увеличении радиуса камеры R_0 по сравнению с радиусами r_0 входного и выходного отверстий, причем правый пик почти не изменяет своего положения на оси частот, а левый пик сдвигается в область более низких частот. Из графика следует также очевидный вывод: чем больше отношение R_0/r_0 , тем лучшую звукоизоляцию обеспечивает камера.

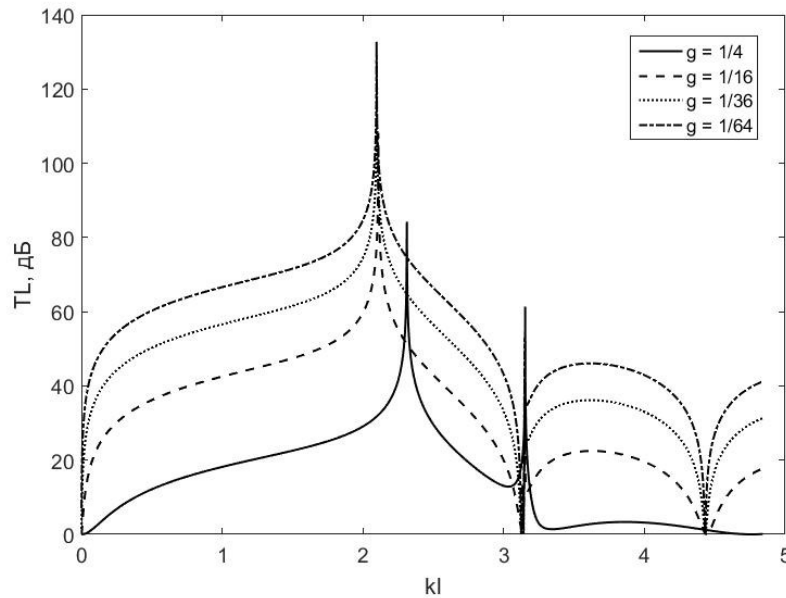


Рис. 4. Зависимости уровня глушения многомодовой камеры от волнового параметра kl для серии камер с различными коэффициентами расширения g .

Параметры камеры: $l = 5,3$ см, $R_0 = 6,5$ см, $g = 1/4; 1/16; 1/36; 1/64$

Рис. 5 демонстрирует зависимости уровня глушения TL от частоты для серии камер, имеющих различные длины l , но одинаковые радиус поперечного сечения R_0 и коэффициент расширения g . Частота первого поперечного (радиального) резонанса в данном случае равна 3190 Гц. Область частот выше 5000 Гц на приведенных графиках соответствует окрестностям критической частоты второй моды в объеме камеры. При малых длинах камеры два изолированных максимума (пика) TL находятся на большом расстоянии по оси частот друг от друга, но по мере увеличения длины камеры они сближаются, а в их окрестности формируется область повышенного уровня глушения. Длина камеры $l = 5,3$ см (при $R_0 = 6,5$ см) соответствует случаю вырождения ее низших собственных частот. При дальнейшем увеличении длины камеры более высокочастотный максимум вновь смещается в область более высоких частот (близких к критической частоте второй моды), что сопровождается существенным падением уровня глушения между максимумами (в рассмотренном примере почти до нуля), причем на частотах

существенно ниже первой критической частоты частотная характеристика уровня глушения многомодовой камеры становится схожей со случаем одномодовой камеры, у которой на продольных собственных частотах наблюдается нулевой уровень глушения (одномодовые камеры более подробно будут рассмотрены ниже).

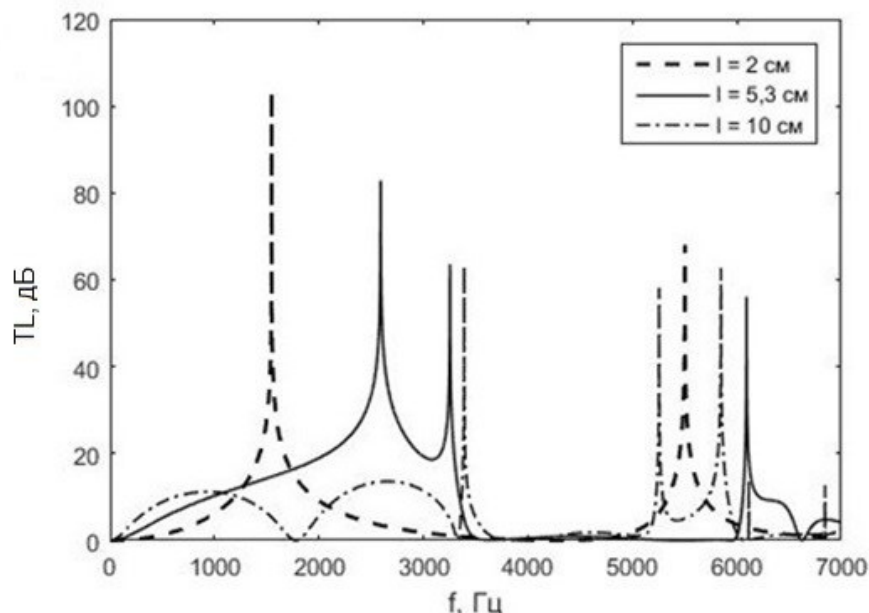


Рис. 5. Зависимости уровня глушения одиночной камеры от частоты для серии камер с различными длинами. Параметры камер: $R_0 = 6,5$ см, $g = 0,385$

Интересно, что формирование двух близкорасположенных максимумов на частотной характеристике $TL(f)$ с повышенными уровнями глушения в их окрестности (в седловине между максимумами и ниже первого из них) наблюдается в довольно узком диапазоне изменения параметров камеры вблизи значений, соответствующих случаю вырождения ее низших собственных частот. Действительно, для камеры с параметрами $R_0 = 6,5$ см, $g = 0,385$ слияние двух максимумов TL в один изолированный максимум наблюдается при увеличении длины камеры всего лишь от $l = 5,30$ см (случай вырождения) до $l = 5,47$ см (т.е. на 3,2%). Эффект слияния двух максимумов TL в один иллюстрируется на рис. 6, где показана эволюция частотной зависимости $TL(f)$ при увеличении длины камеры четырьмя равными шагами от 5,30 см до 5,47 см (наиболее широкое расположение максимумов соответствует случаю вырождения при $l = 5,30$ см, одиночный конечный максимум соответствует $l = 5,47$ см). Отметим, однако, что с практической точки зрения столь высокая «чувствительность» поведения максимумов частотной характеристики TL по отношению к изменению геометрии многомодовой камеры большого значения не имеет, т.к. слияние двух максимумов TL в один в данном случае не сопровождается значительным снижением уровня глушения в окрестности максимумов, будь то двух или одного (см. рис. 6). Для обеспечения эффективного глушения в широкой полосе частот достаточно, чтобы параметры многомодовой камеры были близки к случаю вырождения ее низших собственных частот.

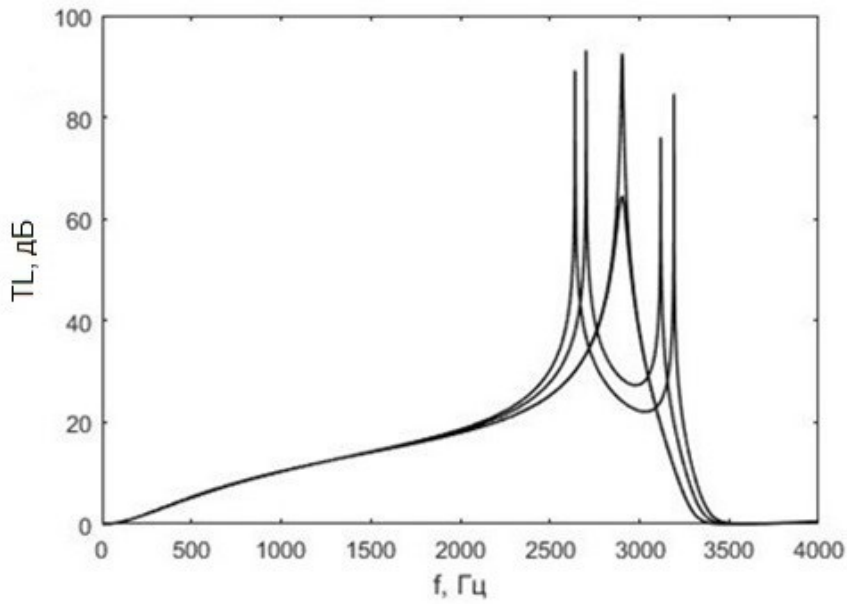


Рис. 6. Зависимость уровня глушения TL одиночной камеры от частоты при изменении длины камеры равными шагами от $l = 5,30$ см до $l = 5,47$ см ($R_0 = 6,5$ см, $g = 0,385$)

Кратко рассмотрим теперь одномодовые камеры. Если параметры камеры расширения таковы, что ее рабочий диапазон частот расположен ниже критической частоты первой моды (это наблюдается, когда радиус ее поперечного сечения достаточно мал в сравнении с длиной волны во всем рабочем диапазоне частот), то распространяющейся в камере является только нулевая (поршневая) мода, а влиянием нераспространяющихся мод первого и более высоких порядков можно пренебречь.

Матрица акустических импедансов одномодовой камеры может быть получена из выражения (1) предельным переходом $m \rightarrow 0$:

$$\hat{Z}_{ac} = i\rho c g^2 \begin{pmatrix} ctg(kl) & -\frac{1}{\sin(kl)} \\ \frac{1}{\sin(kl)} & -ctg(kl) \end{pmatrix}.$$

Из этого выражения нетрудно получить характеристическую матрицу одномодовой камеры, связывающую комплексные амплитуды звукового давления и колебательной скорости p_2, V_2 на выходе камеры с их значениями p_1, V_1 на входе в камеру (т.е. осуществляющую связь вида $p_2 = b_{11} \cdot p_1 + b_{12} \cdot V_1, V_2 = b_{21} \cdot p_1 + b_{22} \cdot V_1$):

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \cos(kl) & i\rho c g^2 \sin(kl) \\ -\frac{1}{i\rho c g^2} \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Соответственно, для уровня глушения одномодовой камеры получаем известную формулу [9]:

$$TL = 10lg \left[\cos^2(kl) + \frac{1}{4} \left(g^2 + \frac{1}{g^2} \right)^2 \sin^2(kl) \right].$$

Данное выражение для уровня глушения одномодовой камеры аналогично формуле для звукоизоляции в задаче о прохождении плоской волны через

плоскопараллельный однородный слой (квадрат коэффициента расширения камеры g^2 в данном случае играет роль фактора, характеризующего геометрическую неоднородность волновода подобно тому, как отношение волновых сопротивлений слоя и окружающей его среды характеризует физическую неоднородность в задаче о звукоизолирующем слое) [9].

Соответственно, частотная характеристика уровня глушения одномодовой камеры аналогична частотной зависимости звукоизоляции слоя (рис. 7).

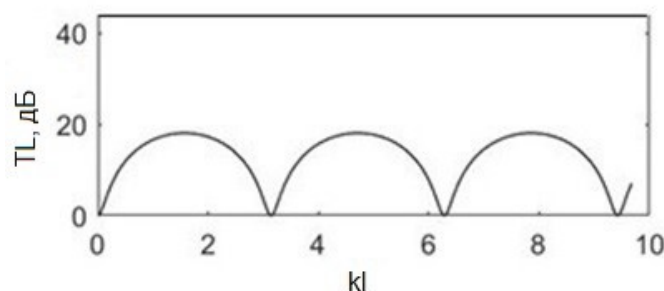


Рис. 7. Зависимость уровня глушения одномодовой камеры от параметра kl для $g = 0,25$

Нули уровня глушения одномодовой камеры наблюдаются при $kl = \pi \cdot n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), максимумы $TL_{max} = 20lg[(g^2 + 1/g^2)/2]$ – при $kl = \pi \cdot (n + 1/2)$.

Отметим, что, поскольку в одномодовой камере распространяется лишь поршневая мода, форма поперечного сечения камеры не влияет на уровень глушения, значение имеет лишь отношение площадей поперечных сечений основного канала и камеры.

2. Роль высших мод в формировании полос пропускания и непропускания в камерных звукоизоляторах

Рассмотрим вопрос о полосах пропускания и непропускания в цепочках одномодовых и многомодовых расширительных камер. Этот вопрос актуален прежде всего с точки зрения создания многокамерных глушителей, однако представляет, на наш взгляд, и чисто физический интерес. Хотя понятие полос пропускания и непропускания в периодических дискретных структурах теоретически определяется для бесконечных цепочек [10], для случая камер расширения особенности, связанные с наличием полос пропускания и непропускания, начинают проявляться даже в коротких цепочках (3-4 камеры).

Основным параметром, описывающим волновой процесс в периодических дискретных структурах, является, как известно, постоянная распространения, позволяющая определить положение полос пропускания и непропускания на оси частот, величину фазового сдвига и коэффициент затухания волны при переходе через звено (камеру) и другие характеристики волнового процесса в структуре. Связь постоянной распространения Γ с элементами характеристической матрицы b_{11} и b_{22} элементарного звена периодической структуры дается соотношением [10]:

$$ch\Gamma = (b_{11} + b_{22})/2. \quad (3)$$

Рассмотрим периодическую цепочку камер расширения. Зная характеристическую матрицу одиночной камеры, легко вычислить постоянную распространения Γ волны в структуре:

$$\Gamma = \text{arch}[(b_{11} + b_{22})/2]. \quad (4)$$

Полосы непропускания определяются условием

$$|ch\Gamma| \geq 1,$$

что соответствует условию $|b_{11} + b_{22}| \geq 2$. В этом случае постоянная распространения может быть представлена в виде $\Gamma = \alpha + i\beta$, где β - величина, кратная числу π (фазовый сдвиг волны), α - коэффициент затухания, определяемый из соотношения $\alpha = \text{arch}[0,5(b_{11} + b_{22})]$ [10].

Условие существования полос пропускания определяется неравенством

$$|ch\Gamma| \leq 1, \text{ т.е. } |b_{11} + b_{22}| \leq 2.$$

При выполнении этого условия постоянная распространения Γ является чисто мнимой величиной: $\Gamma = i\beta$, $\alpha = 0$.

Покажем, что в цепочках камер расширения существование полос непропускания обусловлено исключительно модами высших порядков, а в цепочках одномодовых камер (где существенна лишь поршневая мода) полосы непропускания отсутствуют принципиально.

Обратимся сначала к цепочке одномодовых камер. Зная характеристическую матрицу одиночной одномодовой камеры (2), по формуле (3) легко вычислить величину $ch\Gamma$ для такой цепочки:

$$ch\Gamma = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) = \cos(kl).$$

Поскольку kl - величина действительная, то $|\cos(kl)| \leq 1$, т.е. для одномодовых камер $|ch\Gamma| \leq 1$, что соответствует полосе пропускания, причем для одномодовых камер это условие выполняется всегда. Таким образом, поршневая мода в принципе не может быть ответственной за формирование полос непропускания в рассматриваемых системах.

Рассмотрим теперь цепочку многомодовых камер. Подставляя в формулу (4) выражения для элементов характеристической матрицы камеры, которая может быть получена из матрицы импедансов (1), можно определить постоянную распространения Γ для цепочки многомодовых камер. Поскольку, в отличие от одномодовых камер, для многомодовых камер условие $|b_{11} + b_{22}| \leq 2$, т.е. $|ch\Gamma| \leq 1$, в ряде частотных полос не выполняется, то в этих частотных полосах формируются полосы непропускания, где постоянная распространения становится комплексной: $\Gamma = \alpha + i\beta$. Результаты вычисления Γ для камер с параметрами, соответствующему случаю вырождения низших собственных частот ($l = 5,3$ см, $R_0 = 6,5$ см, $g = 0,385$) (частотная характеристика уровня глушения такой одиночной камеры приведена на рис. 3), представлены на рис. 8 в виде диаграммы Бриллюэна (диаграмма Бриллюэна – способ построения графиков, где по горизонтальной оси откладывается действительная или мнимая часть постоянной распространения Γ , приведенная к интервалу $(-\pi, \pi)$, причем строится симметричное отражение кривой относительно вертикальной оси, а по вертикальной оси – волновой параметр kl).

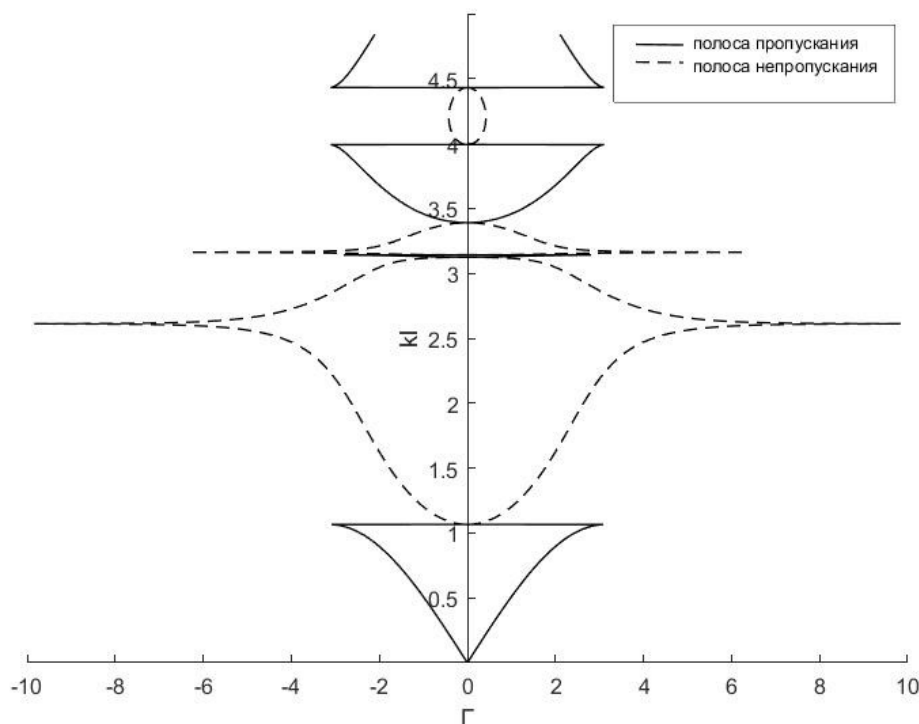


Рис. 8. Зависимость постоянной распространения $\Gamma = \alpha + i\beta$ от параметра kl для бесконечной цепочки многомодовых камер расширения (сплошная линия – фазовый сдвиг β , штриховая линия – коэффициент затухания α)

Таким образом, формирование полос непропускания в цепочках многомодовых камер расширения обусловлено лишь модами первого и более высокого порядков, а в цепочках одномодовых камерах полосы непропускания вообще не существуют.

Из рис. 8 следует, что низкочастотная полоса непропускания многомодовых камер близка по частотному диапазону к области повышенного уровня глушения одиночной камеры (ср. с рис. 3), т.е. формируется вблизи критической частоты первой моды и ниже ее. При этом максимумы коэффициента затухания α наблюдаются на тех же частотах, что и максимумы уровня глушения одиночной многомодовой камеры.

3. Многомодовые камеры расширения с патрубками. Алгоритм расчета и основные акустические свойства

Обратимся теперь к многомодовой камере расширения с патрубками (рис. 2), в которой радиусы входного и выходного волноводов могут различаться (как и прежде, будем считать, что они существенно меньше длины волны во всем интересующем нас диапазоне частот, т. е. распространяющейся во входном и выходном волноводах является только поршневая мода).

Получим систему уравнений для нахождения акустического поля в такой камере. Разделим объем камеры на 3 области: первая область $0 < z < a$; вторая область – центральная $a < z < b$; третья область $b < z < l$ (рис. 2). Для полей комплексной амплитуды скалярного потенциала скорости в указанных областях имеем:

$$\phi_1(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m^{(1)} \sin(k_m^{(1)} z) + B_n^{(1)} \cos(k_m^{(1)} z)] \cdot [J_0(v_m^{(1)} r) + C_m^{(1)} N_0(v_m^{(1)} r)], \quad (5)$$

$$\phi_2(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n^{(2)} \sin(k_n^{(2)} z) + B_n^{(2)} \cos(k_n^{(2)} z)] \cdot J_0(v_n^{(2)} r), \quad (6)$$

$$\phi_3(r, z) = \sum_{p=0}^{\infty} [A_p^{(3)} \sin(k_p^{(3)} z) + B_p^{(3)} \cos(k_p^{(3)} z)] \cdot [J_0(v_p^{(3)} r) + C_p^{(3)} N_0(v_p^{(3)} r)], \quad (7)$$

где $A_m^{(1)}, B_n^{(1)}, C_m^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, A_p^{(3)}, B_p^{(3)}, C_p^{(3)}$ - неизвестные коэффициенты, $J_0(v_q^{(j)} r)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $N_0(v_q^{(j)} r)$ - функция Бесселя второго рода (функция Неймана), $k_m^{(1)}, k_n^{(2)}, k_p^{(3)}$ - волновые числа в первой, второй (центральной) и третьей областях соответственно:

$$k_m^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(v_m^{(1)}\right)^2}, k_n^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(v_n^{(2)}\right)^2}, k_p^{(3)} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(v_p^{(3)}\right)^2},$$

$v_q^{(j)}$ - поперечные собственные значения волнового числа для соответствующей области. Верхние индексы (1), (2), (3) обозначают номер области, к которой относится данная величина; нижние индексы m, n, p обозначают номер моды в первой, второй или третьей областях соответственно.

Граничные условия на жестких стенках для трех областей имеют вид:

1 область:

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (8)$$

2 область:

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0; \quad (9)$$

3 область:

$$\left. \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right|_{r=r_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|_{z=l} = 0. \quad (10)$$

Условия сшивки полей в первой и второй области по давлению и по скорости:

$$\phi_2|_{z=a} = \begin{cases} \phi_1|_{z=a} & r_1 < r < R_0, \\ \frac{p_1}{i\omega\rho} & 0 < r < r_1; \end{cases} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right|_{z=a} = \begin{cases} \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=a} & r_1 < r < R_0, \\ -V_1 & 0 < r < r_1, \end{cases} \quad (12)$$

где p_1 и V_1 - комплексные амплитуды давления и скорости во входном отверстии камеры ($z = a$) (они определяются суперпозицией падающей и отраженной от камеры плоских волн в входном волноводе).

Условия сшивки полей во второй и третьей области по давлению и по скорости:

$$\phi_3|_{z=b} = \begin{cases} \phi_2|_{z=b} & r_2 < r < R_0, \\ \frac{p_2}{i\omega\rho} & 0 < r < r_2; \end{cases} \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right|_{z=b} = \begin{cases} \left. \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right|_{z=b} & r_2 < r < R_0, \\ -V_2 & 0 < r < r_2, \end{cases} \quad (14)$$

где p_2 и V_2 – комплексные амплитуды давления и скорости в выходном отверстии камеры ($z = b$). Будем полагать, что в выходном патрубке отсутствует волна, бегущая справа налево, т.е. выполняется соотношение $p_2 = \rho c V_2$.

Подставляя выражения (5)-(7) в граничные условия (8)-(10) и условия сшивки (11)-(14) и исключая неизвестные коэффициенты, получаем уравнения для нахождения поперечных собственных значений волнового числа для трех вышеуказанных областей объема камеры:

$$J_1\left(v_m^{(1)} R_0\right) - \frac{J_1\left(v_m^{(1)} r_1\right)}{N_1\left(v_m^{(1)} r_1\right)} N_1\left(v_m^{(1)} R_0\right) = 0,$$

$$J_1\left(v_n^{(2)} R_0\right) = 0,$$

$$J_1\left(v_p^{(3)} R_0\right) - \frac{J_1\left(v_p^{(3)} r_2\right)}{N_1\left(v_p^{(3)} r_2\right)} N_1\left(v_p^{(3)} R_0\right) = 0.$$

После преобразований получаем следующую бесконечную линейную систему уравнений, решение которой относительно коэффициентов $B_m^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, B_p^{(3)}$ позволяет получить численные значения элементов матрицы импедансов (или характеристической матрицы) многомодовой камеры с патрубками на выбранной частоте:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} \sin\left(k_n^{(2)} a\right) + B_n^{(2)} \cos\left(k_n^{(2)} a\right) \right] \cdot I_{1n} = \frac{p_1}{i\omega\rho} I_{2n} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} \cos\left(k_m^{(1)} a\right) \cdot I_{3nm};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} k_n^{(2)} \cos\left(k_n^{(2)} a\right) - B_n^{(2)} k_n^{(2)} \sin\left(k_n^{(2)} a\right) \right] \cdot I_{1n} = -V_1 \cdot I_{2n} - \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} k_m^{(1)} \sin\left(k_m^{(1)} a\right) \cdot I_{3nm};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} \sin\left(k_n^{(2)} b\right) + B_n^{(2)} \cos\left(k_n^{(2)} b\right) \right] \cdot I_{1n} =$$

$$= \frac{p_2}{i\omega\rho} \cdot I_{4n} + \sum_{p=0}^{\infty} B_p^{(3)} \left[\operatorname{tg}\left(k_p^{(3)} l\right) \cdot \sin\left(k_p^{(3)} b\right) + \cos\left(k_p^{(3)} b\right) \right] \cdot I_{5np};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} k_n^{(2)} \cos\left(k_n^{(2)} b\right) - B_n^{(2)} k_n^{(2)} \sin\left(k_n^{(2)} b\right) \right] \cdot I_{1n} =$$

$$= -V_2 \cdot I_{4n} + \sum_{p=0}^{\infty} B_p^{(3)} k_p^{(3)} \left[\operatorname{tg}\left(k_p^{(3)} l\right) \cos\left(k_p^{(3)} b\right) - \sin\left(k_p^{(3)} b\right) \right] \cdot I_{5np},$$

где

$$I_{1n} = \frac{R_0^2}{2} J_0^2 \left(v_n^{(2)} R_0 \right),$$

$$I_{2n} = \frac{1}{v_n^{(2)}} r_1 \cdot J_1 \left(v_n^{(2)} r_1 \right),$$

$$I_{3nm} = \frac{v_n^{(2)} r_1 \cdot J_1 \left(v_n^{(2)} r_1 \right) \cdot \left[J_0 \left(v_m^{(1)} r_1 \right) + C_m^{(1)} \cdot N_0 \left(v_m^{(1)} r_1 \right) \right]}{\left(v_m^{(1)} \right)^2 - \left(v_n^{(2)} \right)^2},$$

$$C_m^{(1)} = - \frac{J_1 \left(v_m^{(1)} r_1 \right)}{N_1 \left(v_m^{(1)} r_1 \right)},$$

$$I_{4n} = \frac{1}{v_n^{(2)}} r_2 \cdot J_1 \left(v_n^{(2)} r_2 \right),$$

$$I_{5np} = \frac{\left(v_n^{(2)} \right)^2 r_2 \cdot J_1 \left(v_n^{(2)} r_2 \right) \cdot \left[J_0 \left(v_p^{(3)} r_2 \right) + C_p^{(3)} \cdot N_0 \left(v_p^{(3)} r_2 \right) \right]}{\left(v_p^{(3)} \right)^2 - \left(v_n^{(2)} \right)^2},$$

$$C_p^{(3)} = - \frac{J_1 \left(v_p^{(3)} r_2 \right)}{N_1 \left(v_p^{(3)} r_2 \right)}.$$

Задавая значение амплитуды колебательной скорости V_1 на входе в камеру и включая в число неизвестных величины p_1 и p_2 (амплитуда скорости V_2 определяется из соотношения $p_2 = \rho c V_2$, справедливого при нагрузке выходного волновода на волновое сопротивление среды ρc), из приведенной системы уравнений можно получить все характеристики акустического поля в многомодовой камере с патрубками, а также уровень глушения TL .

Для численного решения системы необходимо ограничить число уравнений (при этом число уравнений должно равняться числу неизвестных). Это можно сделать, ограничивая число мод, учитываемых в каждой из трех вышеуказанных областей объема камеры (очевидно, что нераспространяющиеся моды высших порядков на частотах ниже их критических частот возбуждаются тем менее эффективно, чем выше их порядок, т.е. чем выше их критическая частота). При этом, учитывая, что поперечные размеры

боковых областей 1 и 3 объема камеры меньше, чем радиус поперечного сечения центральной области 2 (и, соответственно, для мод одного и того же порядка критические частоты мод в боковых областях выше, чем в центральной), вполне естественно учитывать в центральной области, как минимум, на одну моду больше, чем в боковых областях. Действительно, для камеры с параметрами $R_0 = 6,5$ см, $r_1 = r_2 = 2,5$ см для первой моды в боковых областях критическая частота равна 4428 Гц, а в центральной - 3227 Гц, т.е. существенно ниже.

Максимальный порядок учитываемых мод (и соответственно, порядок системы) определяется заданной точностью решения и зависит от скорости сходимости алгоритма по числу мод.

Для решения полученной системы уравнения был использован метод обратной матрицы. Проведенные расчеты показали, что при выбранных параметрах камеры ($l = 5,3$ см, $R_0 = 6,5$ см, $r_1 = r_2 = 2,5$ см) основной вклад в акустическое поле в ней вносят первые 5 мод в центральной области и 4 моды в боковых областях. Оценки скорости сходимости численного алгоритма решения показали, что повышение порядка учитываемых мод выше 5 не приводит к сколь-нибудь заметным изменениям решения, т.е. алгоритм сходится довольно быстро, и на практике достаточно учитывать 4-5 мод в центральной области камеры и 3-4 моды в боковых областях.

Рассмотрим результаты расчетов уровня глушения многомодовых камер с патрубками. Наиболее очевидный вывод состоит в том, что наличие патрубков сильно усложняет частотную характеристику уровня глушения камеры даже при небольшой их длине, однако общие тенденции остаются теми же, что и для камер без патрубков. При увеличении длины патрубков более низкочастотный максимум уровня глушения смещается в сторону низких частот (рис. 9) (физической причиной этого является увеличение взаимной присоединенной массы при удлинении патрубков), что открывает возможность более эффективного глушения в низкочастотном диапазоне при неизменной общей длине камеры.

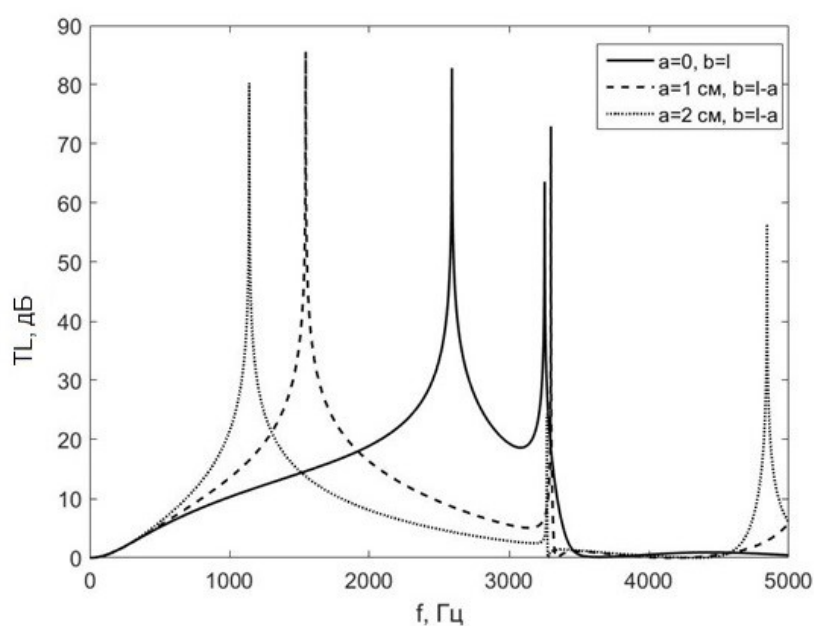


Рис. 9. Частотные зависимости уровня глушения для серии многомодовых камер с фиксированной длиной камеры и различными длинами патрубков.

Параметры камер: $l = 5,3$ см, $R_0 = 6,5$ см, $r_1 = r_2 = 2,5$ см

Из рис. 10, характеризующего изменения частотных характеристик TL по мере увеличения длины камеры при фиксированных длинах патрубков, следует, что для многомодовых камер с патрубками, как и для камер без патрубков, может наблюдаться в некотором смысле парадоксальный эффект: при уменьшении длины камеры l (по сравнению с «оптимальной» длиной $l = 5,3$ см) максимум уровня глушения смещается в сторону низких, а не высоких частот, т.е. более короткая камера лучше глушит на низких частотах. Это свидетельствует о существенной роли нераспространяющихся мод и весьма сложных явлениях в акустическом поле в таких системах. При увеличении же длины сверх $l = 5,3$ см поведение уровня глушения резко меняется, приобретая совершенно иной характер: на низких частотах камера ведет себя как одномодовая, а на частотах выше поперечного резонанса частотная зависимость уровня глушения приобретает сложный нерегулярный характер с чередованием высоких максимумов и глубоких минимумов. Заметим, что аналогичные изменения частотной зависимости уровня глушения наблюдаются и у многомодовых камер без патрубков (рис. 5), однако при наличии патрубков они носят более сложный характер, особенно на частотах выше критических частот мод первого порядка. В частности, при некоторых параметрах камер может наблюдаться более высокий уровень глушения на частотах, превышающих критические.

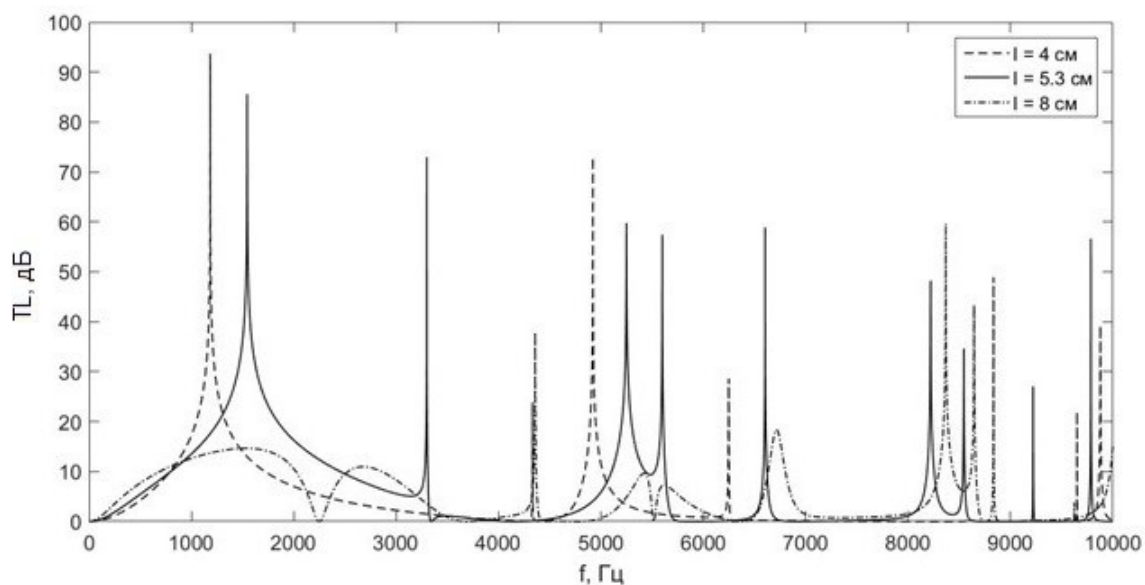


Рис. 10. Частотные зависимости уровня глушения многомодовых камер с патрубками при различных длинах камер.

Параметры камер: $R_0 = 6,5$ см, $r_1 = r_2 = 2,5$ см, $a = 1$ см, $b = l - a$

Заключение

Нераспространяющиеся моды вносят значительный вклад в формирование акустических свойств расширительных камер, имеющих поперечные размеры, сравнимые с длиной волны в рабочем диапазоне частот. Показано, что существование полос непропускания в цепочках камер связано лишь с модами высших порядков (первого и более высоких), а в одномодовых камерах, где во всем рабочем диапазоне частот существенна лишь поршневая мода, существование полос непропускания невозможно в принципе.

На основе предложенного метода расчета звукового поля в многомодовых камерах с патрубками показано, что патрубки оказывают существенное влияние на

акустические характеристики камер, сильно деформируя частотную зависимость уровня глушения даже при небольших их длинах. Изменение длины патрубков открывает возможность некоторого увеличения уровня глушения в определенных диапазонах частот (например, в низкочастотном диапазоне или на частотах, превышающих критические частоты мод первого порядка), что может быть использовано для управления частотной характеристикой уровня глушения.

Список литературы

1. Ingard U. On the radiation of sound into a circular tube, with an application to resonators // J. Acoust. Soc. Am. – 1948. Vol. 20, №5. – P. 665-682.
2. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. – 1953. Vol. 25, № 6. – P. 1037-1061.
3. Егорычев А. В., Прудников А. С., Чернышев К. В. Исследование резонансных свойств некоторых типов неоднородных акустических волноводов // Акуст. журн. – 1973. Т. 19, № 3. – С. 352-358.
4. Кравчун П.Н., Чернышев К.В. О механизме звукоизолирующего действия многомодовых расширительных камер // Акуст. журн. – 1990. Т. 36, №1. – С.58-63.
5. Sahasrabudhe A.D., Anantha Ramu S., Munjal M.L. Matrix condensation and transfer matrix technique in the 3-D analysis of expansion chamber mufflers // Journal of Sound and Vibration. – 1991. Vol. 147, №3. – P. 371-394.
6. Sahasrabudhe A.D., Munjal M.L., Anantha Ramu S. Design of expansion chamber mufflers incorporating 3-D effects // Noise Control Engineering Journal. – 1992. Vol. 38, №1. – P. 27-38.
7. Комкин А.И. Оптимизация реактивных глушителей шума // Акуст. журн. – 2010. Т. 56, №3. – С. 373-379.
8. El-Sharkawy A. I., Nayfeh A. H. Effect of an expansion chamber on the propagation of sound in circular ducts // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. Vol. 63, № 3. – P. 667-674.
9. Кравчун П.Н. Генерация и методы снижения шума и звуковой вибрации. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 184 с.
10. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 458 с.

References

1. Ingard U. On the radiation of sound into a circular tube, with an application to resonators // J. Acoust. Soc. Am. – 1948. Vol. 20, №5. – P. 665-682.
2. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. – 1953. Vol. 25, № 6. – P. 1037-1061.
3. Egorichev A.V., Prudnikov A.S., Chernishev K.V. Issledovanie rezonansnykh svoystv nekotorykh tipov neodnorodnykh akusticheskikh volnovodov // Akust. zhurn. – 1973. Т. 19, № 3. – P. 352-358.
4. Kravchun P.N., Chernishev K.V. O mehanizme zvukoizoliruyushchego deistviya mnogomodovykh rasshiritel'nykh kamer // Akust. zhurn. – 1990. Т. 36, № 1. – P. 352-358.
5. Sahasrabudhe A.D., Anantha Ramu S., Munjal M.L. Matrix condensation and transfer matrix technique in the 3-D analysis of expansion chamber mufflers // Journal of Sound and Vibration. – 1991. Vol. 147, №3. – P. 371-394.

6. Sahasrabudhe A.D., Munjal M.L., Anantha Ramu S. Design of expansion chamber mufflers incorporating 3-D effects // Noise Control Engineering Journal. – 1992. Vol. 38, №1. – P. 27-38.

7. Komkin A.I. Optimizaciya reaktivnyh glushiteley shuma // Akust. zhurn. – 2010. T. 56, № 3. – P. 373-379.

8. El-Sharkawy A. I., Nayfeh A. H. Effect of an expansion chamber on the propagation of sound in circular ducts // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. Vol. 63, № 3. – P. 667-674.

9. Kravchun P.N. Generaciya i metody snizheniya shuma i zvokovoy vibracii. – M.: Izd-vo MGU, 1991. – 184 p.

10. Brilluen L., Parodi M. Rasprostranenie voln v periodicheskikh srtukturah. – M.: Izd-vo inostrannoy literatury, 1959. – 458 p.