

УДК: УДК:534.8

OECD: OECD:1.03AA

Обзор методов аэроакустики и применение вихревой теории звука для численного моделирования тонального шума лопаточных машин

Тимушев С.Ф.^{1*}, Мошков П.А.², Клименко Д.В.³, Федосеев С.Ю.⁴

¹Д.т.н., профессор, ² к.т.н., ведущий инженер, ^{1,2}ННО-101,

^{3,4}К.т.н., доцент, кафедра 202

^{1,2,3,4}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, РФ

Аннотация

Представлен метод расчёта генерации пульсаций давления и излучения шума лопаточными машинами, основанный на разложении поля скорости сжимаемой среды на вихревую и акустическую моды. Предложенный подход акустико-вихревой декомпозиции уравнений движения сжимаемой среды сводится к решению неоднородного волнового уравнения для пульсаций энтальпии. Эти пульсации включают псевдозвуковые колебания в вихревой области источника, а также акустические колебания в ближнем и дальнем полях. Функция источника в уравнении определяется из решений для вихревой компоненты скорости, а граничные условия могут быть сформулированы с помощью комплексного удельного акустического импеданса и градиента пульсаций псевдозвука. Такой подход обеспечивает учет факторов интерференции в ближнем и дальнем поле, влияния дифракции звука и импедансных характеристик поверхностей машины. При использовании декомпозиции источник шума может быть описан как функция полей скоростей вихревой моды и непосредственно связан с параметрами вихревого движения.

Ключевые слова: вихревой звук, вектор Ламба, акустико-вихревая декомпозиция, пульсации давления, тональный шум ЧСЛ, псевдозвук, акустическая мода, удельный комплексный импеданс

Review of Aeroacoustics' Methods and the Application of Vortex Sound Theory for Numerical Modeling of Tonal Noise in Bladed Machines

Timushev S.F.^{1}, Moshkov P.A.², Klimenko D.V.³, Fedoseev S.Yu.⁴*

¹D.Sc., Professor, department 202, ²Ph.D., Leading engineer, NIO-101 department,

^{3,4}Ph.D., Associate professor, department 202

^{1,2,3,4}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Abstract

A method for computing the pressure fluctuations and noise emission produced by bladed machines is proposed. This method relies on the decomposition of the velocity field in a compressible medium into vortex and acoustic components. The approach entails solving an inhomogeneous wave equation for the enthalpy fluctuations, which incorporates pseudosound oscillations in the vortex region and acoustic oscillations in both

*E-mail: irico.harmony@gmail.com (Тимушев С.Ф.)

the near- and far-fields. In order to solve this equation, a source function is derived from solutions for the vortex velocity component. Boundary conditions are established using complex specific acoustic impedances and pseudosound fluctuation gradients. This approach considers the interference effects in both the near and far fields, as well as the impact of sound diffraction and the impedance characteristics of the machine surfaces. When using decomposition, the noise source can be described as a function of the velocity fields of the vortex mode and is directly linked to the parameters of the vortex motion.

Keywords: vortex sound, Lamb vector, acoustic vortex decomposition, pressure pulsations, BPF tonal noise, pseudosound, acoustic mode, specific complex impedance

Введение

Гидродинамическая вибрация и шум лопаточных машин, таких как вентиляторы и насосы, являются на протяжении десятилетий серьезной проблемой, которая влияет на надежность, ресурс и обеспечение уровня шума в соответствии с требованиями стандартов. Генерация шума и вибрации порождается природой течения рабочей среды в проточной части лопаточной машины, в первую очередь неравномерностью параметров потока, обусловленной рабочими лопатками и вращающейся вместе с рабочим колесом относительно статорной части [1]. Неоднородный поток, выходящий из рабочего колеса машины, взаимодействует с неподвижным отводящим устройством. Это, так называемое «ротор-статор» взаимодействие, генерирует пульсации давления и акустические колебания на частоте следования рабочих лопаток (ЧСЛ) и ее высших и комбинационных гармониках. Данный нестационарный процесс сопровождается формированием крупномасштабных вихревых (когерентных структур), эволюция которых и определяет энергетический спектр гидродинамической вибрации и шума.

К лопаточным машинам с дозвуковым течением рабочей среды следует отнести охлаждающие вентиляторы компьютерных систем [2], современных установок для кондиционирования и очистки воздуха. Аналогичные проблемы необходимо решать в насосах. Первые упоминания о данной проблеме датируются 60-ми годами прошлого века, когда речь шла о повреждении крупных промышленных насосов. [3]. В настоящее время, в связи с широким использованием беспилотных летательных аппаратов и развитием аэромобильности дополнительное негативное влияние шума на окружающую среду усиливается [4-7]. Поэтому контроль уровня шума обеспечивает конкурентоспособность проектов летательных аппаратов [8,9].

За последние пять лет область исследований по анализу и методам снижения шума лопаточных машин стала значительно более междисциплинарной, объединив механику жидкости, акустику, науки о данных и материаловедение. Основным трендом является переход от простого констатирующего анализа к проактивному прогнозированию и интеллектуальному контролю пульсаций давления и шума на этапе проектирования и в режиме реального времени.

Применяются методы активного шумоподавления [10,11], используется анализ больших данных и применение машинного обучения [12,13] для создания так называемых «суррогатных моделей», ускоряющих проведение многопараметрической оптимизации конструкций при изменении геометрии или режима работы, минуя дорогостоящие прямые расчеты, что позволяет быстро предсказывать акустические характеристики. Интенсивные исследования проводятся по шуму воздушных винтов и вентиляторов двигателей летательных аппаратов, включая электрические и гибридные силовые установки (eVTOL) [14,15], а также в различных областях промышленности для снижения шума вентиляторов и насосов [16-18]. Стандартом стало использование методов

моделирования крупных вихрей (LES) или гибридных подходов (DES, IDDES) для расчетов нестационарного потока и генерации шума в следе за лопатками [19,20]. Активно развиваются и применяются методы, подобные уравнению Фокс-Вильямса-Хоукинса (FW-H) и решатели акустики прямого численного моделирования (CAA), которые используют данные CFD для вычисления распространения шума в дальнее поле [21,22].

Одновременно продолжают интенсивно развиваться методы численного моделирования в России [23-27].

1 Феноменология генерации шума ЧСЛ

Экспериментальные исследования потока в центробежных вентиляторах [28] и компрессорах [29,30], а также анализ течения на выходе рабочих колес центробежных насосов показывает, что поток в межлопаточном канале и на выходе рабочего колеса делится на две зоны: высокоэнергетическую струю и низкоэнергетическую область следа. [31]. Указанное распределение параметров потока дает существенную неравномерность относительных и абсолютных скоростей, а также углов потока по шагу рабочей решетки. За нерабочей стороной лопатки образуется зона отрицательной завихренности, которая формирует когерентную вихревую структуру в турбулентном потоке, вращающуюся вместе с колесом. Причиной нестационарного процесса генерации пульсаций давления ЧСЛ является эволюция этих вихревых структур в зоне ротор-статорного взаимодействия. Эти возмущения формируются вследствие взаимодействия периодически неоднородного потока, вращающегося с окружной скоростью U рабочего колеса, с элементами отводящего устройства. Диффузия и диссипация вихрей, а также затухание акустических возмущений, вызванное вязкостью, наряду с тепловыми эффектами, имеют второстепенный характер. В связи с этим, для упрощения анализа, соответствующие члены в результирующих уравнениях не учитываются, а течение рассматривается как изоэнтропическое.

Феномен генерации колебаний на частоте следования лопаток можно рассмотреть на упрощенной модели, приведенной на рисунке 1.

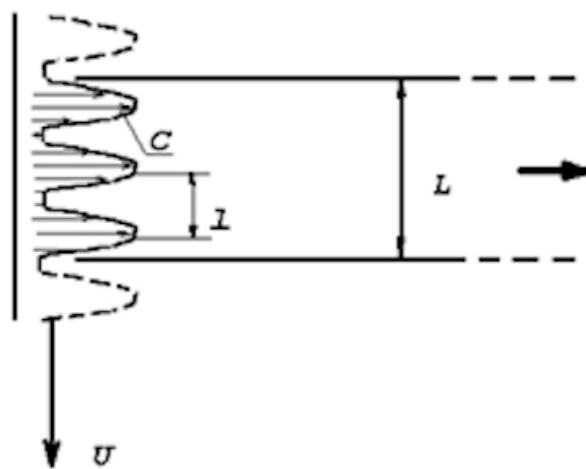


Рисунок 1 – Феноменология возбуждения колебаний вихревым потоком

Можно представить полубесконечную трубу диаметра L , в которую поступает нестационарный поток, образованный вращающимся периодическим распределением скорости C с заданным периодом l , значительно меньше, чем L . Скорость C сравнима

по порядку величины со скоростью вращения периодической неравномерности U . Так как поперечный размер трубы L вмещает целое число пространственных возмущений скорости l , расход через поперечное сечение трубы сохраняется постоянным.

Такая модель описывает крайние случаи для генерации. Если скорость вращения U значительно меньше C , неоднородный профиль скорости распространяется по трубе без затухания. В противоположном случае, если l значительно больше диаметра L , будут возникать колебания расхода внутри трубы. В данной ситуации, согласно каскадному механизму переноса энергии от крупных вихрей к более мелким, первоначальные вихревые возмущения быстро гасятся за счет турбулентного обмена с одновременным возникновением акустических возмущений, которые распространяются со скоростью звука. Возле входного сечения трубы формируется ограниченная зона вихревых возмущений, размер которой по порядку величины соответствует шагу l , согласно первому закону турбулентности.

Представление колебательного движения сжимаемой жидкости как совокупности акустических и вихревых мод позволяет существенно упростить систему исходных уравнений, одновременно объединяя две области исследования. Одна из них характеризуется использованием нелинейных уравнений, тогда как в другой динамика описывается линейными уравнениями, что облегчает анализ процессов.

2 Развитие численных методов аэроакустики

Развитие методов численного моделирования генерации шума шло исторически по трем основным направлениям. К первому направлению следует отнести методы, основанные на применении классической аналогии Лайтхилла [32], которые привели к разработке метода Фокс-Вильямса-Хоукинса [33] с введением обобщенных функций для интегрирования уравнения Лайтхилла в присутствии твердых границ. Упрощенное решение может быть получено с использованием так называемой поверхности Кирхгофа [34]. Этот подход, по сути, сводит решение к случаю однородного волнового акустического уравнения с заданными граничными условиями на некоторой граничной поверхности. Развитие методов вычислительной аэродинамики показывает, что проблема источника (правой части волнового уравнения) является центральной проблемой, которая определяет точность и эффективность метода. В таблице 1 приведены все основные подходы вычислительной аэроакустики, использующиеся в настоящее время.

Таблица 1 – Методы аэроакустики

Н п/п	Подход	Теория. Основная идея	Ключевые источники	Типичное применение
1	Лайтхилл (Lighthill) Ландау, Блохинцев	Фундаментальная акустическая аналогия.	Все течение — источник. Объемные квадруполь	Свободные турбулентные струи
2	Фокс Вильямс — Хоукинс (FWH)	Обобщение на задачи с твердыми поверхностями	Объемные квадруполь, поверхностные диполь (силы), монополи (пульсация)	Шум от любых обтекаемых тел: вентиляторы, винты и др.
3	Кирхгоф (Kirchhoff)	Метод формирования акустического поля	Не источники, а граничные условия на поверхности	Распространение звука через неоднородные течения

Продолжение таблицы 1

4	Рибнер (Ribner)	Декомпозиция турбулентных мод	Разделение источников и влияние среднего потока	Исследование механизмов генерации шума
5	Хоу (Howe)	Теория вихревого звука (с учетом энтропийной моды)	Взаимодействие завихренности с градиентами энтропии и с поверхностями	Шум от кромок, звук при обтекании препятствий
6	Кроу (Crow) Артамонов Пауэл (Powell)	Модель шума от взаимодействия вихрей Вектор Ламба	Нестационарность вихревого следа	Низкочастотный шум за самолетами. Неустойчивость горения

С учетом анализа феноменологии генерации колебаний ЧСЛ наиболее перспективным является подход, который впервые предложен Пауэлом [35], а далее развит в работах Кроу [36], Артамонова [37], Хоу [38]. Ключевая идея этого подхода заключается во введении так называемого «вектора Ламба», который определяется как дивергенция от векторного произведения вектора скорости на вектор завихренности. Такой подход позволяет связать источник акустических колебаний напрямую с эволюцией вихревых возмущений в нестационарном потоке. Промежуточное положение занимает подход Рибнера [39], в котором введено прямое разделение стационарной и пульсационной составляющей для акустической и вихревой моды.

3 Декомпозиция и основные уравнения

В соответствии с теоремой Коши-Гельмгольца, нестационарная скорость сжимаемой среды разлагается на скорость вихревой моды $\mathbf{U}$ (поступательное и вращательное движение в несжимаемой жидкости) и акустическую составляющую V_a . Для описания акустической скорости вводится скалярный потенциал (4):

$$V_a = \nabla \varphi. \quad (1)$$

В результате финальное выражение для скорости сжимаемой среды принимает вид:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \nabla \varphi = \mathbf{U} + V_a. \quad (2)$$

Далее исследуется дозвуковое течение с малыми акустическими колебаниями, (число Маха $M = U/a \ll 1$, ($V_a \ll a$, где a - скорость звука), что позволяет упростить рассмотрение.

Из анализа следует, что колебания энтальпии i в изоэнтропическом течении определяются решением волнового уравнения, которое представлено в виде:

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 i}{dt^2} - \Delta i = -\Delta H, \quad (3)$$

где источниковая функция в (3) определяется из поля скоростей вихревой моды:

$$-\Delta H = \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) = \nabla \cdot \left(\nabla \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \mathbf{U} \times \nabla \times \mathbf{U} \right). \quad (4)$$

При игнорировании конвективных членов, уравнении (3) представлено в упрощенной форме:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \Delta i = S, \quad (5)$$

где источниковая функция S , выражается через скорость вихревого движения:

$$S = \nabla \left(\nabla \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \mathbf{U} \times \nabla \times \mathbf{U} \right). \quad (6)$$

В невозмущенном потоке акустический потенциал принимает значение $\varphi = 0$, тогда:

$$i_0 = H_0; \quad S_0 = -H_0. \quad (7)$$

Пульсационная часть функции S обозначена через s .

Средние значения и пульсационные компоненты функций энтальпии i , псевдозвука H , и источниковой функции s связаны зависимостями:

$$h = i - i_0; \quad g = H - H_0; \quad s = S - S_0. \quad (8)$$

Учитывая, что амплитуда колебаний давления существенно меньше среднего значения, для энтальпии можно применить приближенное выражение:

$$h \approx \frac{(P - P_0)}{\rho_0} = \frac{P'}{\rho_0}. \quad (9)$$

Аналогично описываются колебания, вызванные псевдозвуком:

$$g \approx \frac{H - H_0}{\rho_0} = \frac{P'_v}{\rho_0}, \quad (10)$$

где P' – звуковое давление, P'_v – псевдозвук, ρ_0 – плотность.

Пульсации давления образуются суммой акустических колебаний и псевдозвуковых пульсаций:

$$P' = P'_v - \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (11)$$

Решение уравнений вихревой моды и неоднородного волнового уравнения (5) проводится независимо с учетом соответствующих граничных условий. При обработке волнового уравнения важно учитывать декомпозицию граничных условий: на импедансной границе производная энтальпии h по нормали n , выражается через временные производные и удельный комплексный акустический импеданс Z для конкретной гармоники (12). С учетом псевдозвуковых колебаний:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|^n = -\frac{1}{aZ} \left(\frac{h^{m+1} - h^{m-1}}{2\Delta t} \right) + \frac{\partial g}{\partial n} + \frac{1}{aZ} \frac{\partial g}{\partial t} \quad (12)$$

Значения псевдозвуковых колебаний g определяются из решений для вихревой моды.

4 Применение аналитического подхода

Численное моделирование акустических характеристик лопаточных машин становится стандартом промышленности, обеспечивая, в том числе коммерческую эффективность проектов. В этой связи требуется повышение точности расчетов и обеспечение высокой скорости вычислений – время расчета одного варианта должно составлять несколько минут, чтобы обеспечивать эффективное применение методов многопараметрической оптимизации.

Необходимо обеспечивать прямую увязку акустических параметров с характеристиками вихревого течения в лопаточной машине. В этой связи возникает необходимость в создании аналитических моделей, позволяющих быстро и надежно описывать сложные вихревые течения. Ниже, предлагается в качестве постановочного примера, подход на примере сворачивающейся вихревой пелены.

4.1 Постановка задачи

В жидкости выделена область $\mathbf{M}$, занимаемая сворачивающейся вихревой пеленой. Введена отвечающая условию (13) подстановка $\vec{r}_n(t, b, \theta)$, характеризующая траекторию движения бесконечно малого объема жидкости:

$$\{\vec{r}_n \in R : n \in N, \vec{r}_n \subseteq M\} \quad (13)$$

Вектор – функция $\vec{r}_n$ получена как результат скалярного произведения вектор – функции, которая есть суть спираль, на матрицу поворота слева:

$$\begin{aligned} \{\vec{r}_n\} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta + \varphi) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta + \varphi) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \cdot t \cdot \cos(\omega t) \\ b \cdot t \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b \cdot t \cdot \cos(\omega t) \\ \cos(\theta + \varphi) (R + b \cdot t \cdot \sin(\omega t)) \\ \sin(\theta + \varphi) (R + b \cdot t \cdot \sin(\omega t)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Построенная при следующих значениях параметров: $R = 0,5$ м, $b = 0,02$ м/с и $\omega = 1$ рад/с, $\varphi = 0$ на основании (14) поверхность имеет вид (рисунок 2А).

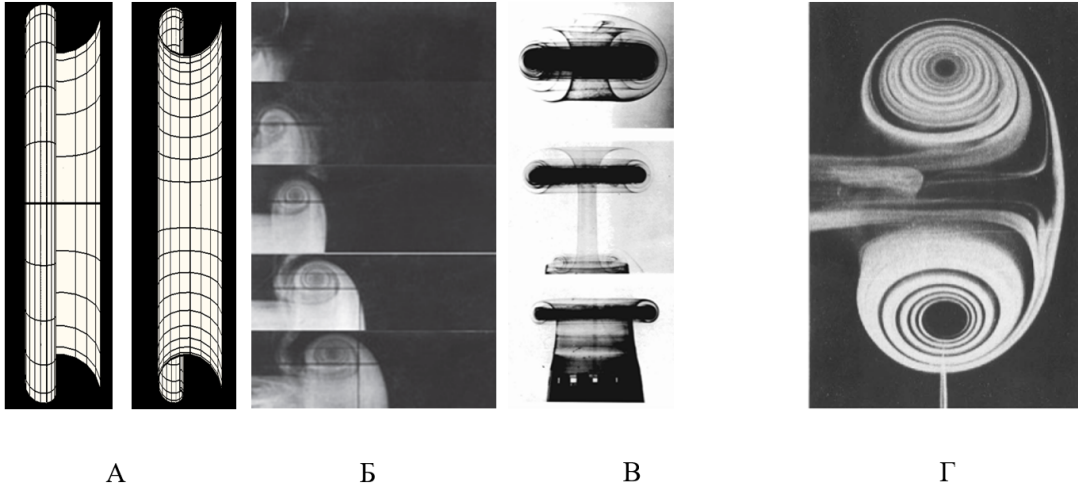


Рисунок 2 – График соответствующий вектор – функция $\vec{r}_n$ (А), формирующееся вихревое кольцо [40] (Б), Отрыв сформировавшегося вихревого кольца от стенок сопла (В), Ламинарное вихревое кольцо [41] (Г)

Фотографии формирующихся вихревых колец, аналогичные изображенным на рисунке 2Б, могут быть получены с использованием ящика Вуда. Существуют и более сложные установки с трубкой (соплом), в которую помещается небольшой объем подкрашенной жидкости или дыма для визуализации. Затем, за 3-4 секунды объем выдавливается из трубки поршнем и на конце трубки (сопла) можно наблюдать формирование вихревого кольца.

Фотографии формирующегося вихревого кольца (рисунок 2Б, В) и полученная согласно (14) поверхность имеют визуальное сходство. Конечная форма спиральной поверхности (рисунок 2А), соответствующей конкретному вихревому кольцу является результатом решения системы уравнений, включающей уравнение движения.

4.2 Вектор – функция скорости

Определены два множества $\tilde{W}$ (15) и W (16) элементы, которых являются векторами скорости:

$$\bigcup_{n \in N} \{\vec{w}_n\} = \tilde{W} \quad (15)$$

$$\bigcup_{n \in N} \{\vec{w}_n\} = W \quad (16)$$

Вектор – функция, устанавливающая строгое соответствие между W и x, y, z считается неопределенной и самостоятельно неопределимой. Строгое соответствие между компонентами вектора $\{\vec{w}_n\}$ и b, t, θ при угловой скорости $\omega = 1$ рад/с и $\varphi = 0$ определено с использованием вектор – функции $\{\vec{r}_n(b, t, \theta)\}$ при условии, что производная $\frac{d\{\vec{r}_n\}}{dt}$ существует. Процедура поиска производной $\frac{d\{\vec{r}_n\}}{dt}$ сводится к последовательности операций (16) – (18).

Инвариантная форма первого дифференциала компонент вектор – функция $\{\vec{r}_n\}$ соответствует (17):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

При условии, что b (связан с шагом спирали) и θ (угол поворота) не зависят от времени t производные $\frac{d\vec{r}_n}{dt}$ вычисляются как частные согласно (17):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial z}{\partial b} \frac{db}{dt} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, строгое соответствие между компонентами вектора $\{\vec{w}_n\}$ и b, t, θ при угловой скорости $\omega=1$ рад/с устанавливается согласно (18):

$$\begin{aligned}\tilde{w}_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = b \cdot \cos(\omega \cdot t) - b \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t), \\ \tilde{w}_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \cos(\theta) \cdot (b \cdot t \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)), \\ \tilde{w}_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \sin(\theta) \cdot (b \cdot t \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)).\end{aligned}\quad (19)$$

4.3 Уравнение непрерывности потока массы

В Эйлеровой постановке для случая бездивергентного течения уравнение непрерывности потока массы имеет вид (20):

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Вектор – функция $\vec{w}(x, y, z)$ в (20) неопределенна и поэтому рассмотрена эквивалентная функция $\vec{w}(b, t, \theta)$:

$$\vec{w}(x, y, z) = \vec{w}(b, t, \theta). \quad (21)$$

Утверждение (21) основано на (22) для компонент вектора $\vec{w}$, исходя из инвариантности формы первого дифференциала $d\vec{w}$:

$$\begin{aligned}dw_x &= \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz = \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial b} db + \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \theta} d\theta, \\ dw_y &= \frac{\partial w_y}{\partial x} dx + \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + \frac{\partial w_y}{\partial z} dz = \frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial b} db + \frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \theta} d\theta, \\ dw_z &= \frac{\partial w_z}{\partial x} dx + \frac{\partial w_z}{\partial y} dy + \frac{\partial w_z}{\partial z} dz = \frac{\partial \tilde{w}_z}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{w}_z}{\partial b} db + \frac{\partial \tilde{w}_z}{\partial \theta} d\theta.\end{aligned}\quad (22)$$

Частные производные в (20) определяются из решения (22). Решение (22) относительно $\frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial y}, \frac{\partial w_z}{\partial z}$ получено путем подстановки решения (17) относительно $db, bt, d\theta$ в (22) с последующим приравнованием коэффициентов при dx, dy, dz .

Производные $\frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_y}{\partial y}, \frac{\partial w_z}{\partial z}$, таким образом, представлены как функции от b, t, θ .

4.4 Уравнение движения

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости, в векторной форме, при отсутствии внешних сил приведено к виду (23):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \Delta \vec{w}, \quad (23)$$

где ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость, p – давление)

Переход от терминов скорости к терминам завихренности осуществлен как векторное произведение (23) на оператор Гамильтона слева, и позволяет избежать

неопределенности, связанной с законом распределения давления p . Результат векторного произведения – уравнение эволюции поля завихренности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{w}) + (\vec{w} \cdot \nabla) \cdot \text{rot}(\vec{w}) - (\text{rot}(\vec{w}) \cdot \nabla) \cdot \vec{w} = \nu \Delta \cdot \text{rot}(\vec{w}). \quad (24)$$

Исходная вектор – функция скорости $w(x,y,z)$ есть функция от координат, но не от времени, что определяет величину $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}$ равной нулю, преобразуя в итоге (21) в (22):

$$(\vec{w} \cdot \nabla) \cdot \text{rot}(\vec{w}) - (\text{rot}(\vec{w}) \cdot \nabla) \cdot \vec{w} = \nu \Delta \cdot \text{rot}(\vec{w}). \quad (25)$$

4.5 Определение источника

Система уравнений (26) получена на основании (20) и (25).

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0, \\ (\vec{w} \cdot \nabla) \cdot \text{rot}(\vec{w}) - (\text{rot}(\vec{w}) \cdot \nabla) \cdot \vec{w} = \nu \Delta \cdot \text{rot}(\vec{w}). \quad (26)$$

Решение системы уравнений (26) с учётом (19) определено для b, θ , как функций от параметра t . Подстановка полученного решения в (14) определяет геометрические характеристики формируемого вихревого кольца. Давление может быть найдено из подстановки полученного решения в уравнение Навье-Стокса, с последующим интегрированием.

Таким образом, в терминах скорости, может быть получено аналитическое решение уравнения эволюции поля завихренности для бездивергентного течения. Аналитическое решение позволяет определить источник акустических колебаний ЧСЛ в лопаточной машине с учетом частоты вращения Ω ротора лопаточной машины:

$$\vec{U} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_n + \vec{w} \quad (27)$$

Получить решение неоднородного волнового уравнения:

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \\ = 2 \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{\partial U_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} \right). \quad (28)$$

Заключение

Применение прямой декомпозиции поля скорости сжимаемой среды на вихревую и акустическую моды помогает устранить условности традиционных аэроакустических аналогий, которые отрывают анализ эволюции когерентных турбулентных возмущений в вихревом потоке от определения источника акустических колебаний. Такой подход также открывает путь для применения аналитических моделей вихревого движения с целью ускорения акустических расчетов в задачах оптимизации лопаточных машин.

Список использованных источников

1. Покровский Б.В., Юдин Е.Я. Основные особенности шума и вибрации центробежных насосов. - Акустический журнал, 1966, т.ХІІ, вып.3.

2. Thimany, J. (2014). Attacking Noise Early. *Mechanical Engineering*, 136(8), 44–49.
3. Chen, Y. N. (1961). Water-Pressure Oscillations in the Volute Casings of Storage Pumps. *Sulzer Technical Review*, (Research Number), 21–34.
4. Кривун К.В., Тимушев С.Ф. Влияние взаимного положения винтов гексакоптера на излучаемую звуковую мощность // *Noise Theory and Practice*. 2023. Т. 9. № 2 (33). С. 149-160.
5. Чернышов П.С., Кузнецов П.Н. Экспериментальное исследование шума винто-кольцевого движителя // *Noise Theory and Practice*. 2025. Т. 11. № 2 (41). С. 69-81.
6. Мошков П.А. Исследование слышимости и маскировки шума винтового беспилотного воздушного судна фоном окружающей среды // *Noise Theory and Practice*. 2021. Т. 7. № 2 (24). С. 28-38.
7. Погосян М.А., Мошков П.А. Современные проблемы аэроакустики винтовых летательных аппаратов самолётного типа // *Динамика и виброакустика*. 2023. Т. 9. № 1. С. 6-15.
8. Sinibaldi, G., & Marino, L. (2013). Experimental analysis on the noise of propellers for small UAV. *Applied Acoustics*, 74(1), 79–88.
9. Moshkov P., Samokhin V., Yakovlev A., Bolun C. The problems of selecting the power plant for light propeller-driven aircraft and unmanned aerial vehicle taking into account the requirements for community noise // *Akustika*. 2021. Vol. 39. pp. 164–169.
10. Li, Z., He, F., & Huang, X. (2024). Active flow and noise control of a low-speed fan using synthetic jet actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 568, 118049.
11. Zhou, P., & Li, Y. (2023). Active structural-acoustic control of blade passing frequency noise in a ventilation fan using piezoelectric actuators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 186, 109863.
12. Zhao, B., & Yang, V. (2023). A machine learning framework for predicting unsteady pressure pulsations in a hydraulic turbine under off-design conditions. *Renewable Energy*, 216, 119080.
13. Wang, K., Sun, Y., & Liu, C. (2024). A deep learning-based surrogate model for rapid prediction of turbomachinery noise. *Applied Acoustics*, 215, 109732.
14. Thompson, D., & Zhang, X. (2024). Aeroacoustic design and optimization of a propeller for a quiet urban air vehicle. *Journal of Aircraft*, 61(2), 450–465.
15. Giezeman, R., & Ragni, D. (2023). Experimental characterization of installation effects on propeller noise for distributed electric propulsion. *Experiments in Fluids*, 64(2), 32.
16. Liu, J., Li, Y., & Liu, Z. (2022). Experimental and numerical investigation on the aerodynamic noise reduction of a cross-flow fan in air conditioning systems. *Building and Environment*, 223, 109458.
17. Schmidt, K., & Mueller, S. (2023). Flow-induced noise in automotive cooling fans: Mechanisms and mitigation through blade design. *SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH*, 7(2).
18. Gu, F., & Li, G. (2022). Numerical and experimental study on the influence of volute tongue design on pressure pulsations and noise of a centrifugal pump. *Journal of Fluids Engineering*, 144(11).
19. Fu, Y., Yuan, J., Yuan, S., Li, Z., & Pace, G. (2023). Investigation of rotor-stator interaction and unsteady pressure pulsations in a centrifugal pump based on SBES method. *Physics of Fluids*, 35(4).
20. Sun, Y., & Liu, C. (2023). Large Eddy Simulation of tip clearance flow and its broadband noise in an axial fan. *Journal of Sound and Vibration*, 544, 117435.
21. Zhang, L., & Wang, H. (2022). Prediction of tonal noise from a subsonic axial fan with a coupled IDDES-FW-H approach. *Applied Acoustics*, 195, 108827.

22. Ramos-García, N., Shen, W. Z., & Sørensen, J. N. (2022). High-fidelity CFD/CAA simulations of aeroacoustics and performance of propellers for urban air mobility. *Aerospace Science and Technology*, 131, 107968.
23. Россихин А.А., Милешин В.И. Расчетное исследование влияния клокинга (clocking) на тональный шум первых двух подпорных ступеней турбореактивного двухконтурного двигателя // *Акустический журнал*. 2025. Т. 71. № 4. С. 582-597.
24. Россихин А.А., Дружинин Я.М., Милешин В.И. Расчетное исследование тонального шума модельного вентилятора со сверхнизкой окружной скоростью на режимах «набор высоты» и «взлет» с использованием метода расчета в частотной области // *Математическое моделирование*. 2025. Т. 37. № 5. С. 139-160.
25. Titarev, V. A., Chernyshev, S. A., & Faranosov, G. A. (2025). Численное моделирование аэродинамики и тонального шума винта с использованием параллельного кода «Gerbera». *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 40(4), 313–340.
26. Abalakin, I. V., Bakhvalov, P. A., Bobkov, V. G., Duben, A. P., Gorobets, A. V., Kozubskaya, T. K., Rodionov, P. V., & Zhdanova, N. S. (2024). Суперкомпьютерный код Noisette CFD&CAA для исследований и приложений. *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 11(2), 78–101.
27. Kopiev, V. F., Ostrikov, N. N., Faranosov, G. A., Titarev, V. A., Denisov, S. L., & Akinshin, R. V. (2024). О механизме латеральной асимметрии излучения шума винта, установленного вблизи крыла. *Акустический журнал*, 70(5), 833–849.
28. Локшин И.Л. Исследование потока за колесами центробежных вентиляторов в относительном движении.- В кн.: Промышленная аэродинамика./ ЦАГИ. М.: Оборонгиз, 1959, №12.
29. Экардт. Мгновенные измерения в выходящем из рабочего колеса центробежного компрессора потоке типа “струя-след”.- *Энергетические машины и установки*, 1975, №3.
30. Джонсон, Мур. Развитие срывных зон в межлопаточных каналах центробежного колеса.-*Энергетические машины и установки*, 1980, т.102, №2.
31. Johnston, J. P., Halleen, R. M., & Lezius, D. K. (1972). Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 56(3), 533–557.
32. Lighthill, M. J. (1952). On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 211(1107), 564–587.
33. Ffowcs Williams, J. E., & Hawkings, D. L. (1969). Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A Mathematical and Physical Sciences*, 264(1151), 321–342.
34. Zhu, Y. J., Ou, Y. H., & Tian, J. (2008). Experimental and Numerical Investigation on Noise of Rotor Blade Passing Outlet Grille. *Noise Control Engineering Journal*, 56
35. Powell, A. (1964). Theory of vortex sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1), 177–195.
36. Crow, S. C. (1970). Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Studies in Applied Mathematics*, 49(1), 21–44.
37. К.И. Артамонов Термогидро-акустическая устойчивость. М.:Машиностроение, 1982. – 261С.
38. Howe, M. S. (1975). Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, 71(4), 625–673.
39. Ribner, H. S. (1964). The Generation of Sound by Turbulent Jets. *Advances in*

Applied Mechanics, 8, 103–182.

40. Альбом течений жидкости и газа. Сост. М.Ван-Дайк. Пер. с англ. М., Мир, 1986.

41. Д. Г. Ахметов Формирование и основные параметры вихревых колес. Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, N-о 5.

References

1. Pokrovsky, B.V., Yudin, E.Y. (1966). Main Features of Noise and Vibration in Centrifugal Pumps. *Akusticheskii Zhurnal*, 12(3).
2. Thimany, J. (2014). Attacking Noise Early. *Mechanical Engineering*, 136(8), 44–49.
3. Chen, Y. N. (1961). Water-Pressure Oscillations in the Volute Casings of Storage Pumps. *Sulzer Technical Review*, (Research Number), 21–34.
4. Krivun, K.V., Timushev, S.F. (2023). Influence of the Mutual Position of Hexacopter Rotors on the Radiated Sound Power. *Noise Theory and Practice*, 9(2), 149-160.
5. Chernyshov, P.S., Kuznetsov, P.N. (2025). Experimental Study of Noise from a Propeller-Ring Thruster. *Noise Theory and Practice*, 11(2), 69-81.
6. Moshkov, P.A. (2021). Study of Audibility and Masking of Unmanned Aerial Vehicle Propeller Noise by Ambient Background. *Noise Theory and Practice*, 7(2), 28-38.
7. Pogosyan, M.A., Moshkov, P.A. (2023). Current Problems of Aeroacoustics for Fixed-Wing Propeller Aircraft. *Dynamics and Vibroacoustics*, 9(1), 6-15.
8. Giorgia Sinibaldi, Luca Marino, “Experimental analysis on the noise of propellers for small UAV,” *Applied Acoustics* Volume 74, Issue 1, January 2013, Pages 79-88
9. Moshkov P., Samokhin V., Yakovlev A., Bolun C. The problems of selecting the power plant for light propeller-driven aircraft and unmanned aerial vehicle taking into account the requirements for community noise // *Akustika*. 2021. Vol. 39. pp. 164–169.
10. Li, Z., He, F., & Huang, X. (2024). Active flow and noise control of a low-speed fan using synthetic jet actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 568, 118049.
11. Zhou, P., & Li, Y. (2023). Active structural-acoustic control of blade passing frequency noise in a ventilation fan using piezoelectric actuators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 186, 109863.
12. Zhao, B., & Yang, V. (2023). A machine learning framework for predicting unsteady pressure pulsations in a hydraulic turbine under off-design conditions. *Renewable Energy*, 216, 119080.
13. Wang, K., Sun, Y., & Liu, C. (2024). A deep learning-based surrogate model for rapid prediction of turbomachinery noise. *Applied Acoustics*, 215, 109732.
14. Thompson, D., & Zhang, X. (2024). Aeroacoustic design and optimization of a propeller for a quiet urban air vehicle. *Journal of Aircraft*, 61(2), 450-465.
15. Giezeman, R., & Ragni, D. (2023). Experimental characterization of installation effects on propeller noise for distributed electric propulsion. *Experiments in Fluids*, 64(2), 32.
16. Liu, J., Li, Y., & Liu, Z. (2022). Experimental and numerical investigation on the aerodynamic noise reduction of a cross-flow fan in air conditioning systems. *Building and Environment*, 223, 109458.
17. Schmidt, K., & Mueller, S. (2023). Flow-induced noise in automotive cooling fans: Mechanisms and mitigation through blade design. *SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH*, 7(2).
18. Gu, F., & Li, G. (2022). Numerical and experimental study on the influence of volute tongue design on pressure pulsations and noise of a centrifugal pump. *Journal of Fluids Engineering*, 144(11).

19. Fu, Y., Yuan, J., Yuan, S., Li, Z., & Pace, G. (2023). Investigation of rotor-stator interaction and unsteady pressure pulsations in a centrifugal pump based on SBES method. *Physics of Fluids*, 35(4).
20. Sun, Y., & Liu, C. (2023). Large Eddy Simulation of tip clearance flow and its broadband noise in an axial fan. *Journal of Sound and Vibration*, 544, 117435.
21. Zhang, L., & Wang, H. (2022). Prediction of tonal noise from a subsonic axial fan with a coupled IDDES-FW-H approach. *Applied Acoustics*, 195, 108827.
22. Ramos-García, N., Shen, W. Z., & Sørensen, J. N. (2022). High-fidelity CFD/CAA simulations of aeroacoustics and performance of propellers for urban air mobility. *Aerospace Science and Technology*, 131, 107968.
23. Rossikhin, A.A., Milesin, V.I. (2025). Numerical Study of the Clocking Effect on the Tonal Noise of the First Two Booster Stages of a Turbofan Engine. *Acoustical Physics*, 71(4), 582-597.
24. Rossikhin, A.A., Druzhinin, Ya.M., Milesin, V.I. (2025). Numerical Study of Tonal Noise from a Model Fan with Ultra-Low Circumferential Speed in "Climb" and "Take-off" Modes Using a Frequency-Domain Method. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 37(5), 139-160.
25. Titarev, V. A., Chernyshev, S. A., & Faranosov, G. A. (2025). Numerical simulation of propeller aerodynamics and tonal noise using parallel code 'Gerbera'. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 40(4), 313-340.
26. Abalakin, I. V., Bakhvalov, P. A., Bobkov, V. G., Duben, A. P., Gorobets, A. V., Kozubskaya, T. K., Rodionov, P. V., & Zhdanova, N. S. (2024). Noisette CFD&CAA supercomputer code for research and applications. *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 11(2), 78-101.
27. Kopiev, V. F., Ostrikov, N. N., Faranosov, G. A., Titarev, V. A., Denisov, S. L., & Akinshin, R. V. (2024). On the mechanism of lateral asymmetry of noise radiation from a propeller installed near a wing. *Acoustical Physics*, 70(5), 833-849.
28. Lokshin, I.L. (1959). Investigation of the Flow Behind the Impellers of Centrifugal Fans in Relative Motion. In: *Industrial Aerodynamics*. TsAGI. Moscow: Oborongiz, Issue 12.
29. Eckardt, D. (1975). Instantaneous Measurements in the Jet-Wake Flow at the Exit of a Centrifugal Compressor Impeller. *Energomashinostroyeniye (Power Machinery)*, (3).
30. Johnson, M.W., Moore, J. (1980). The Development of Stall Zones in the Passages of a Centrifugal Impeller. *Energomashinostroyeniye (Power Machinery)*, 102(2).
31. Johnston, J. P., Halleen, R. M., & Lezius, D. K. (1972). Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 56(3), 533-557.
32. Lighthill, M. J. (1952). On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 211(1107), 564-587.
33. Ffowcs Williams, J. E., & Hawkings, D. L. (1969). Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A Mathematical and Physical Sciences*, 264(1151), 321-342.
34. Zhu, Y. J., Ou, Y. H., & Tian, J. (2008). Experimental and Numerical Investigation on Noise of Rotor Blade Passing Outlet Grille. *Noise Control Engineering Journal*, 56
35. Powell, A. (1964). Theory of vortex sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1), 177-195.
36. Crow, S. C. (1970). Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Studies in Applied Mathematics*, 49(1), 21-44.
37. : Artamonov, K.I. (1982). *Thermo-Hydro-Acoustic Stability*. Moscow:

Mashinostroenie. – 261 p.

38. Howe, M. S. (1975). Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, 71(4), 625–673.

39. Ribner, H. S. (1964). The Generation of Sound by Turbulent Jets. *Advances in Applied Mechanics*, 8, 103–182.

40. Van Dyke, M. (1982). *An Album of Fluid Motion*. Stanford: The Parabolic Press.

41. Akhmetov, D.G. (2001). Formation and Main Parameters of Vortex Rings. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 42(5)