

УДК: 534.2
OECD: 1.03

Волновые процессы в однородных слоистых средах при акустическом профилировании донного грунта

Вагин А.В.^{1*}, Воротынцева А.С.²

¹Ассистент кафедры ЭУТ, ²Аспирант кафедры ЭУТ, ассистент кафедры физики,
^{1,2}Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
г. Санкт-Петербург, РФ

Аннотация

В работе исследуются особенности распространения акустических волн в системе «вода-донный грунт», причем грунт представляет собой однородную слоистую среду «ил-скальное основание». Для данной модели рассмотрены волновые процессы при переходе акустической волны из водной среды в грунтовый слой, определены коэффициенты отражения, прохождения и трансформации при распространении акустической волны на границе «вода-грунт» при нормальном и наклонном зондировании. Рассмотрены волновые процессы в слоистой среде «ил-скальное основание» на основе задачи распространения волны типа Лява. Получено дисперсионное уравнение, по решению которого построены графические зависимости скорости волны Лява от частоты (диапазон частот – рабочие частоты акустического профилографа донного грунта) для различных толщин первого грунтового слоя. Показано, что скорость распространения волны с увеличением частоты убывает, также на характер частотной зависимости оказывает влияние параметр толщины грунтового слоя: с увеличением толщины скорость волны убывает быстрее.

Ключевые слова: волна Лява, дисперсионное уравнение, слоистая среда, однородные граничные условия, акустическое профилирование донного грунта, волновые процессы

Wave Processes in Homogeneous Layered Media during Acoustic Bottom Soil Profiling

Vagin A.V.^{1*}, Vorotyntseva A.S.²

¹Assistant of the Department of Electroacoustics and Ultrasonic Engineering,
²Assistant of the Department of Physics, postgraduate student of the Department of
Electroacoustics and Ultrasonic Engineering,
^{1,2}St. Petersburg Electrotechnical University ETU 'LETI', St. Petersburg, Russia

Abstract

This work investigates the features of acoustic wave propagation in the 'water-bottom soil' system, and the soil is a homogeneous layered 'silt- bedrock' medium. For this model, wave processes during the transition of an acoustic wave from an aqueous medium to a soil layer are considered, and the coefficients of reflection, transmission, and transformation during the propagation of an acoustic wave at the water-soil boundary under normal and inclined sounding are determined. Wave processes in a layered 'silt- bedrock' medium are considered based on the problem of wave propagation of the Love type. A dispersion equation is obtained, by solving which graphical dependences of the Love wave velocity on frequency are constructed (frequency range – operating

*E-mail: av.vagin@bk.ru (Вагин А.В.)

frequencies of the bottom profiling device) for various thicknesses of the first soil layer. It is shown that the wave propagation velocity decreases with increasing frequency, and the nature of the frequency dependence is also influenced by the parameter of the thickness of the soil layer: with increasing thickness, the wave velocity decreases faster.

Keywords: Love wave, dispersion equation, layered medium, homogeneous boundary conditions, acoustic bottom soil profiling, wave processes

Введение

В последние десятилетия проблема изучения структуры дна Мирового океана представляет актуальную задачу и предписывает существенный интерес для различного рода исследований фундаментального и прикладного характера. Исследование структуры океанического и морского дна вносит значительный вклад в понимание геологического строения донных пород, проливая свет на историю формирования морей и процессы, определяющие структуру пород морского дна [1].

В современной геофизике ключевым инструментом для подобных изысканий являются гидроакустические средства, обеспечивающие высокоэффективное неконтактное изучение донных осадочных толщ [2]. Современные гидроакустические методики позволяют осуществлять стратиграфическое расчленение донных грунтов с их последующей типизацией. В основе этих методов лежит феномен акустической неоднородности осадочных пород, которая обуславливает частичное отражение звуковой энергии на границах раздела слоёв и рефракцию акустических лучей при прохождении через различные геологические структуры. Аппаратный комплекс, функционирующий на данном принципе, идентифицируется как акустический профилограф донного грунта [3]. Анализ волновых процессов при распространении акустического сигнала позволяет определить характеристики осадочных пород донного грунта, которые служат классификационными признаками при отнесении определенного грунта к тому или иному типу. При этом предполагается, что осадочные породы представляют собой систему однородных слоистых сред с плоскопараллельным положением границ между слоями на пути распространения отраженных волн.

Акустическое профилирование донного грунта основано на анализе сложных физических механизмов, формирующих вторичное акустическое поле, переизлучаемое донной поверхностью. Дно океана представляет собой границу раздела двух сред с резко различными акустическими свойствами - водной толщи и подстилающих геологических пород. При взаимодействии падающего акустического луча с этой границей происходит многокомпонентное преобразование энергии: одна ее часть поглощается, другая - рассеивается, а третья - отражается обратно в водную среду.

Количественное моделирование этих процессов сопряжено со значительными трудностями. Ключевым осложняющим фактором является сильное влияние микро- и макрорельефа дна на характер переизлучения звука. Рельеф дна океана, отличающийся чрезвычайным разнообразием (включая подводные горы, хребты, равнины и котловины), изучен лишь фрагментарно, что не позволяет создать универсальную модель. Кроме того, как отмечалось, проникшая в донные осадки часть звуковой энергии подвергается дальнейшему преобразованию: она рассеивается на объемных неоднородностях грунта и отражается от внутренних стратиграфических границ, разделяющих слои осадков с разными физическими параметрами. Следует отметить, что информация о количественных характеристиках внутренней структуры дна (таких как литология, пористость и плотность слоев) является еще менее доступной, чем данные о рельефе.

Эта неопределенность вносит основную неоднозначность в попытки точного описания акустических явлений на границе «вода – донный грунт» [4–6]. Общие сведения о геоморфологии дна, его структуре, распределении основных зон и типах донных отложений детально представлены в научной литературе [7–9].

Таким образом, целью работы является исследование особенностей распространения акустических волн в системе слоистых сред «вода-донный грунт». Поставлены задачи исследовать волновые процессы при распространении волн от источника излучения (антенны) в водной среде, распространение волн на границе «вода-грунт», а также особенности распространения акустических волн непосредственно в грунте, представляющем собой систему из двух слоев «ил-скальное основание». По аналогии с работой [10], волновые процессы в грунте целесообразно рассматривать как распространение волны типа Лява.

1 Описание распространения волн при акустическом профилировании донного грунта

Рассмотрим задачу акустического профилирования донного грунта. При этом имеет место распространение акустической волны в жидкой среде (вода) и переход ее в твердую слоистую среду (грунт). При этом важно уделить внимание волновым процессам, происходящим на границах раздела двух сред, т.е. в первом случае волновые процессы на границе раздела «вода-грунт» и во втором случае, при дальнейшем распространении волны в грунте волновые процессы на границе раздела двух твердых сред донного грунта «ил-скальное основание».

Рассмотрим падение акустической волны из воды в грунт (рисунок 1).

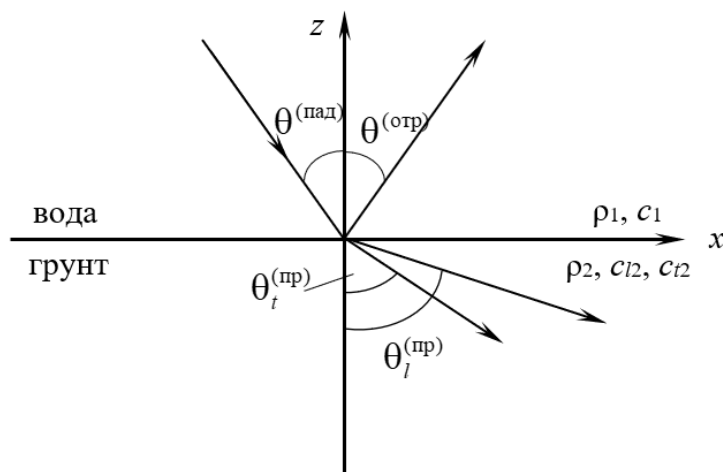


Рисунок 1 – Падение акустической волны из воды в грунт

На рисунке 1: ρ_1, c_1 – параметры водной среды (плотность и скорость звука (продольной волны) соответственно), ρ_2, c_{l2}, c_{t2} – параметры грунта (плотность, скорость продольной и поперечной волны соответственно).

Таким образом, рассматривается задача отражения и преломления плоской волны, падающей из жидкости на границу раздела «жидкость-твердая среда». При этом важно учитывать, что водная среда считается лишенной вязкости, поэтому в толще воды рассматривается распространение только продольной волны. В твердой среде, принимаемой однородной и изотропной, в общем случае возникает две волны – продольная и поперечная. Из [11] известно, что при рассмотрении задачи такого типа

удобно воспользоваться такими вспомогательными параметрами как скалярный Φ и векторный Ψ потенциал смещений. Вектор смещения ξ определяется как:

$$\xi = \text{grad}\Phi + \text{rot}\Psi = \xi_l + \xi_t,$$

где параметры ξ_l и Φ описывают поле продольной волны, а ξ_t и Ψ – поле поперечной волны.

Как было сказано выше, в жидкой среде распространяется только продольная волна, поэтому поля падающей и отраженной волны описываются только параметром скалярного потенциала Φ (обозначения в соответствии с рисунком 1):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\text{пад}) &= A(\text{пад}) e^{i(\omega t - k_x^{(\text{пад})} x + k_z^{(\text{пад})} z)} \text{ при } z \geq 0, \\ \Phi(\text{отр}) &= A(\text{отр}) e^{i(\omega t - k_x^{(\text{отр})} x - k_z^{(\text{отр})} z)} \text{ при } z \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ω – круговая частота волны, t – время, k – волновое число, x, z – координаты распространения в прямоугольной системе координат.

Поле продольной волны в донном грунте можно представить в виде:

$$\Phi^{(\text{пр})} = A_l^{(\text{пр})} e^{i(\omega t - k_{lx}^{(\text{пр})} x + k_{lz}^{(\text{пр})} z)} \quad z \leq 0, \quad (2)$$

а поперечная волна, в свою очередь, описывается при помощи векторного потенциала $\Psi^{(\text{пр})}$, причем, как показано в [11], единственной ненулевой его проекцией является у-компонента $\Psi_y^{(\text{пр})}$. В соответствии с этим поле преломленной поперечной волны описывается выражением:

$$\Psi_y^{(\text{пр})} = A_t^{(\text{пр})} e^{i(\omega t - k_{tx}^{(\text{пр})} x + k_{tz}^{(\text{пр})} z)} \quad z \leq 0. \quad (3)$$

Используя выражения (1)-(3) можно записать коэффициенты отражения, прохождения и трансформации в следующем виде:

$$R_{ll}^\Phi = \frac{A(\text{отр})}{A(\text{пад})}, T_{ll}^\Phi = \frac{A_l^{(\text{пр})}}{A(\text{пад})}, T_{lt}^\Phi = \frac{A_t^{(\text{пр})}}{A(\text{пад})},$$

где R_{ll}^Φ – коэффициент отражения продольной волны по потенциалу смещения, T_{ll}^Φ – коэффициент прохождения продольной волны по потенциалу смещения, T_{lt}^Φ – коэффициент трансформации по потенциалу смещения продольной волны в преломленную поперечную волну.

Представляя проекции волновых векторов через углы падения $\theta^{(\text{пад})}$, отражения $\theta^{(\text{отр})}$ и преломления $\theta_l^{(\text{пр})}, \theta_t^{(\text{пр})}$, запишем выражения (1)-(3) в следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\text{пад}) &= A(\text{пад}) e^{i(\omega t - k_1 \sin \theta^{(\text{пад})} x + k_1 \cos \theta^{(\text{пад})} z)} \text{ при } z \geq 0, \\ \Phi(\text{отр}) &= A(\text{пад}) R_{ll}^\Phi e^{i(\omega t - k_1 \sin \theta^{(\text{отр})} x + k_1 \cos \theta^{(\text{отр})} z)} \text{ при } z \geq 0, \\ \Phi(\text{пр}) &= A(\text{пад}) T_{ll}^\Phi e^{i(\omega t - k_{l2} \sin \theta_l^{(\text{пр})} x + k_{l2} \cos \theta_l^{(\text{пр})} z)} \text{ при } z \leq 0, \\ \Psi_y^{(\text{пр})} &= A(\text{пад}) T_{lt}^\Phi e^{i(\omega t - k_{t2} \sin \theta_t^{(\text{пр})} x + k_{t2} \cos \theta_t^{(\text{пр})} z)} \text{ при } z \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где приняты следующие обозначения: $k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \frac{\omega}{c^{(\text{пад})}} = \frac{\omega}{c^{(\text{отр})}}, k_{l2} = \frac{\omega}{c_{l2}} = \frac{\omega}{c_t^{(\text{пр})}}.$

Данную систему следует дополнить законом Снеллиуса:

$$\frac{\sin \theta^{(\text{пад})}}{c_1} = \frac{\sin \theta^{(\text{отр})}}{c_1} = \frac{\sin \theta_t^{(\text{нр})}}{c_{t2}} = \frac{\sin \theta_t^{(\text{нр})}}{c_{t2}}. \quad (5)$$

Выполняя некоторые математические преобразования, подробно описанные в [11], получим окончательные выражения для коэффициентов отражения, прохождения и трансформации:

$$R_{ll}^{\Phi} = \frac{Z_l \cos^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z_t \sin^2 2\theta_t^{(\text{нр})} - Z}{Z_l \cos^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z_t \sin^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z}, \quad (6)$$

$$T_{ll}^{\Phi} = \frac{2Z_l \cos^2 2\theta_t^{(\text{нр})}}{Z_l \cos^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z_t \sin^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (7)$$

$$T_{lt}^{\Phi} = \frac{-2Z_t \sin^2 2\theta_t^{(\text{нр})}}{Z_l \cos^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z_t \sin^2 2\theta_t^{(\text{нр})} + Z} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения: $Z = \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta^{(\text{пад})}}$, $Z_l = \frac{\rho_2 c_{t2}}{\cos \theta_t^{(\text{нр})}}$, $Z_t = \frac{\rho_2 c_{t2}}{\cos \theta_t^{(\text{нр})}}$.

На практике для анализа волновых процессов чаще используются коэффициенты отражения, прохождения и трансформации по смещению, которые связаны с вышеопределенными коэффициентами по потенциалу следующим образом [11]:

$$R_{ll}^{\xi} = R_{ll}^{\Phi}, \quad T_{ll}^{\xi} = \frac{c_1}{c_{t2}} T_{ll}^{\Phi}, \quad T_{lt}^{\xi} = -\frac{c_1}{c_{t2}} T_{lt}^{\Phi}. \quad (9)$$

При акустическом профилировании донного грунта возможно два случая излучения волны антенной: зондирование по нормали – при этом угол падающей волны $\theta^{(\text{пад})} = 0$, а также зондирование под углом $\theta^{(\text{пад})} \neq 0$ (наклонное зондирование). Рассмотрим эти два случая.

При нормальном зондировании имеем в соответствии с (5)-(8): $\theta^{(\text{пад})} = \theta^{(\text{отр})} = \theta_t^{(\text{нр})} = \theta_t^{(\text{нр})} = 0$, и тогда:

$$R_{ll}^{\xi} = \frac{\rho_2 c_{t2} - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_{t2} + \rho_1 c_1}, \quad T_{ll}^{\xi} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_2 c_{t2} + \rho_1 c_1}, \quad T_{lt}^{\xi} = 0. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при нормальном зондировании в грунте не возникает поперечная волна, и грунт (по определению – твердая среда) в данном случае ведет себя как жидкость с плотностью ρ_2 и скоростью звука c_{t2} .

Легко видеть, что при наклонном зондировании в грунте будет возникать как продольная, так и поперечная волны, за исключением случая, когда угол преломления поперечной волны в грунте составляет $\theta_t^{(\text{нр})} = 45^\circ$. Согласно (5), этот случай соответствует углу падения волны:

$$\theta^{(\text{пад})} = \arcsin \left[\frac{c_1}{c_{t2}} \sin \theta_t^{(\text{нр})} \right] \Big|_{\theta_t^{(\text{нр})}=45^\circ} = \arcsin \left[\frac{c_1}{c_{t2} \sqrt{2}} \right]. \quad (11)$$

Откуда имеем:

$$R_{ll}^{\xi} = \frac{Z_t - Z}{Z_t + Z}, \quad T_{ll}^{\xi} = 0, \quad T_{lt}^{\xi} = \frac{2Z_t}{Z_t + Z} \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_{t2}}. \quad (12)$$

Таким образом, в данном случае продольная волна в грунте не возникает.

На основании (10)-(12) вычислим коэффициенты отражения, прохождения и трансформации по смещению для модели «вода-грунт», где в качестве грунта рассмотрим ил с параметрами [6]: $\rho_2 = 1480 \text{ кг/м}^3$, $c_{l2} = 1700 \text{ м/с}$, $c_{t2} = 320 \text{ м/с}$; параметры водной среды принимаются равными: $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 1500 \text{ м/с}$.

При нормальном зондировании по (10): $R_u^\xi \approx 0,253$, $T_u^\xi \approx 0,747$, $T_{tt}^\xi = 0$.

При наклонном зондировании (рассмотрим случай, когда акустическая волна излучается антенной под углом $\theta^{(\text{пад})} = 30^\circ$), на основании формулы (11), получим, что угол преломления поперечной волны будет составлять $\theta_t^{(\text{пр})} \approx 6,085^\circ$. И тогда, применяя (5)-(9) и проводя элементарные вычисления, получим: $R_u^\xi \approx 0,257$, $T_u^\xi \approx 0,744$, $T_{tt}^\xi = 0,029$.

Из расчетов видно, что коэффициент отражения при зондировании под наклоном 30° относительно нормального зондирования увеличился на тысячные доли, коэффициент прохождения, наоборот, уменьшился, а коэффициент трансформации повысился на несколько сотых долей.

2 Распространение волн Лява вдоль поверхности донного грунта при условии жесткого контакта

Для поставленной задачи исследования будем рассматривать распространение упругих волн с учетом ограничений в слоистой однородной среде в виде структуры «твердый слой-упругое полупространство». Материалом твердой среды примем ил, материалом упругого полупространства выступает – скальное основание, то есть каменная порода (рисунок 2). Для данных сред известны плотности и параметры Лямэ: ρ_1 , λ_1 , μ_1 – для слоя ила, ρ_2 , λ_2 , μ_2 – для скального полупространства. Для определенности, требующейся при дальнейших расчетах, установим, что слой ила может иметь толщину, которую в дальнейшем будем обозначать h , колеблющуюся в пределах от нескольких сантиметров до нескольких сотен метров, скальное основание может достигать в глубину нескольких километров и даже десятков километров – в модели структуры представляет собой упругое полупространство.

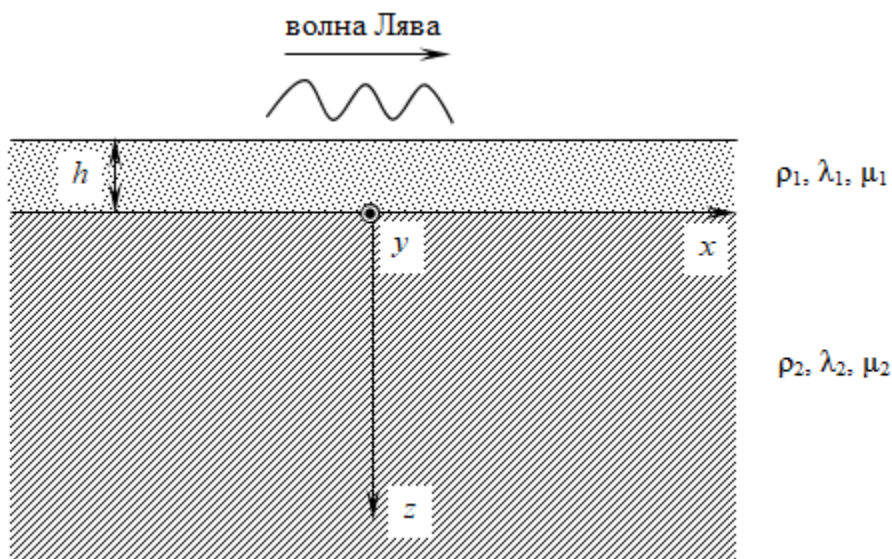


Рисунок 2 – Геометрические соотношения задачи

В общем случае уравнение движения изотропной однородной идеально упругой среды записывается следующим образом [12, 13]:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{\xi} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \boldsymbol{\xi}), \quad (13)$$

где ρ – плотность среды, в которой происходит распространение упругой волны, $\boldsymbol{\xi}$ – вектор упругого смещения, λ и μ – первый и второй параметры Лямэ соответственно, также второй параметр Лямэ μ называется модулем сдвига [14]. Данные параметры относятся к константам, характеризующим свойство упругих деформаций изотропных твердых материалов.

Из [12, 15], а также ряда экспериментальных данных известно, что волна Лява чисто поперечная волна с горизонтальной поляризацией. В этой связи, для волны Лява уравнение движения изотропной однородной идеально упругой среды преобразуется к следующему виду:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_t}{\partial t^2} - \mu \Delta \xi_t = 0, \quad (14)$$

где ξ_t – компонента вектора механического смещения по для поперечной волны, $\Delta \xi_t = \text{grad}(\text{div} \xi_t)$.

Для рассматриваемого случая (рисунок 2) распространения волны Лява происходит параллельно слоям, т.е. в направлении координаты x . При данной постановке задачи упругие смещения имеют лишь одну компоненту, отличную от нуля – компоненту смещения, направленную по оси y , которую будем обозначать ξ_y . Остальные компоненты смещения равны между собой и имеют нулевое значение:

$$\xi_y \neq 0, \quad \xi_x = \xi_z = 0. \quad (15)$$

С учетом (15), уравнение движения (14) перепишем в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi_y. \quad (16)$$

При распространении плоской гармонической поверхностной волны вдоль границы системы «твердый слой-упругое полупространство» компоненты смещения как в слое $\xi_y^{(1)}$, так и в полупространстве $\xi_y^{(2)}$ должны удовлетворять уравнению движения (16).

В [13], показано, что решения для $\xi_y^{(1,2)}$ находятся в виде уравнения гармонической волны, распространяющейся вдоль границы:

$$\xi_y^{(1)} = [A \sin(s_1 z) + B \cos(s_1 z)] e^{i(kx - \omega t)} - h \leq z \leq 0, \quad (17)$$

$$\xi_y^{(2)} = C e^{-s_2 z} e^{i(kx - \omega t)} \quad z \geq 0, \quad (18)$$

где A, B, C – неизвестные постоянные, $s_1 = \sqrt{k_{1t}^2 - k^2}$, $s_2 = \sqrt{k^2 - k_{2t}^2}$, (под s подразумевается ветвь этой функции, удовлетворяющая условию излучения), $k = \frac{\omega}{c}$ – волновое число, $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ – волновое число поперечной волны, ω – круговая частота, c – фазовая скорость волны Лява, x, z – параметры системы координат, t – время.

Компоненты механических напряжений выражаются согласно обобщенному закону Гука как линейная зависимость тензора деформаций и тензора напряжений [16]:

$$\sigma_{ik} = C_{iklm} u_{lm},$$

где σ_{ik} – тензор напряжений, C_{iklm} – тензор модулей упругости, u_{lm} – тензор деформаций.

В этой связи, учитывая закон Гука компоненты механических напряжений в первой среде твердого упругого слоя и в полупространстве можно представить в виде [16]:

$$\sigma_{yz}^{(1)} = 2\mu_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_y^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z^{(1)}}{\partial y} \right) = \mu_1 \frac{\partial \xi_y^{(1)}}{\partial z}, \quad (19)$$

$$\sigma_{yz}^{(2)} = 2\mu_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_y^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z^{(2)}}{\partial y} \right) = \mu_2 \frac{\partial \xi_y^{(2)}}{\partial z}. \quad (20)$$

Для вывода дисперсионного уравнения необходимо подставить соотношения (17)-(20) в граничные условия, соответствующие модели жесткого контакта на межслойной границе. В результате данной процедуры формируется система из четырех уравнений. Решение этой системы относительно волнового числа позволяет определить фазовую скорость распространения волны.

В соответствии с [12] введем систему граничных условий, обеспечивающих непрерывность всех компонент вектора смещения и тензора механических напряжений на поверхностях $z = 0$ и $z = h$, что отвечает полному прохождению волны без отражения. Первое граничное условие (21) определяет равенство компонент механических напряжений при координате $z = 0$ (см. рисунок 2), второе граничное условие (22) предполагает нулевыми компоненты механических напряжений на границе раздела сред при координате $z = h$, где параметр h определяет толщину слоя, и третье граничное условие – уравнение (23) – определяет условие жесткого контакта для компонент упругого смещения в слое и полупространстве.

Таким образом, граничные условия, соответствующие модели жесткого контакта на межслойной границе имеют вид:

$$\sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \quad z = 0, \quad (21)$$

$$\sigma_{yz}^{(1)} = 0 \quad z = h, \quad (22)$$

$$\xi_z^{(1)} = \xi_z^{(2)} \quad z = 0. \quad (23)$$

Путем подстановки найденных компонент упругих смещений (17)-(20) и механических напряжений в заданные граничные условия (21)-(23) выводится система уравнений (24):

$$\begin{cases} \mu_1 \frac{\partial \xi_y^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_2 \frac{\partial \xi_y^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ \frac{\partial \xi_y^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \\ \xi_y^{(1)} \Big|_{z=0} = \xi_y^{(2)} \Big|_{z=0}. \end{cases} \quad (24)$$

Выполним подстановку компонент упругих смещений для слоя и полупространства (17), (18) в систему уравнений (24), и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A\mu_1 s_1 + C\mu_2 s_2 = 0, \\ A \cos(s_1 h) + B \sin(s_1 h) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Из системы уравнений (25) составим определитель и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 s_1 & \mu_2 s_2 \\ \cos(s_1 h) & \sin(s_1 h) \end{vmatrix} = 0.$$

Решая определитель разложением по первой строке, получим дисперсионное уравнение (26):

$$\mu_1 s_1 \operatorname{tg}(s_1 h) = \mu_2 s_2, \quad (26)$$

где введены сокращения $\mu_1 = \rho_1 c_{1t}^2$, $\mu_2 = \rho_2 c_{2t}^2$ – модули сдвига в слое и полупространстве соответственно.

Учитывая $s_1 = \sqrt{k_{1t}^2 - k^2}$, $s_2 = \sqrt{k^2 - k_{2t}^2}$, можно видеть, как соотносятся между собой волновые числа и скорости распространения волн в слое и полупространстве:

$$k_{1t}^2 > k^2 > k_{2t}^2, \quad (27)$$

$$c_2 > c > c_1, \quad (28)$$

Дисперсионное уравнение (26) характеризуется наличием бесчисленного множества решений, каждое из которых описывает волну Лява определенного порядка. С целью выведения соотношения, определяющего основную (фундаментальную) моду, целесообразно исследовать предельные условия ее существования.

Одним из ключевых ограничений для скорости распространения волны Лява является ее положение относительно скоростей поперечных волн в слое и полупространстве. В частности, анализ показывает, что эффективная скорость волны асимптотически приближается к значению скорости поперечной волны в подстилающей среде:

$$c \rightarrow c_{2t}, k \rightarrow k_{2t} \quad s_2 \rightarrow 0. \quad (29)$$

Учитывая ограничение (29), в дисперсионном уравнении (26) можно принять: $\operatorname{tg}(s_1 h) \rightarrow 0$, откуда следует, что $s_1 h \rightarrow n\pi$. И тогда можно записать [12, 16]:

$$s_1 h = h \sqrt{k_{1t}^2 - k^2} = k_{1t} h \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_{1t}^2}} = k_{1t} h \sqrt{1 - \left(\frac{c_{1t}}{c}\right)^2} \Big|_{c \rightarrow c_{2t}} = k_{1t} h \sqrt{1 - \left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)^2},$$

что свидетельствует о том, что при $c \rightarrow c_{2t}$ возможно появление новой волны на некоторых предельных частотах, которые определяются следующим образом:

$$k_{1t} h = \frac{n\pi}{1 - \left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)^2}, \quad (30)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер моды.

Рассмотрим следующий крайний случай: $c \rightarrow c_{1t}$. Получим соотношения (31), аналогично предыдущему случаю (29):

$$c \rightarrow c_{1t}, k \rightarrow k_{1t} \quad s_1 \rightarrow 0. \quad (31)$$

Тогда с учетом (31) дисперсионное уравнение принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}(s_1 h) \rightarrow \infty \Rightarrow s_1 h \rightarrow \frac{\pi(n+1)}{2} \Rightarrow h \rightarrow \infty \Rightarrow k_{1t} \rightarrow \infty, \quad (32)$$

из чего следует, что появление новой волны возможно в области высоких частот.

На основе дисперсионного уравнения (26), проведем построение зависимости скорости от частоты f в диапазоне рабочих частот профилографа донного грунта (1,25 кГц [17]) для различных толщин слоя $h = 10, 25, 50, 100, 150$ м. Полученные зависимости представлены на рисунке 3.

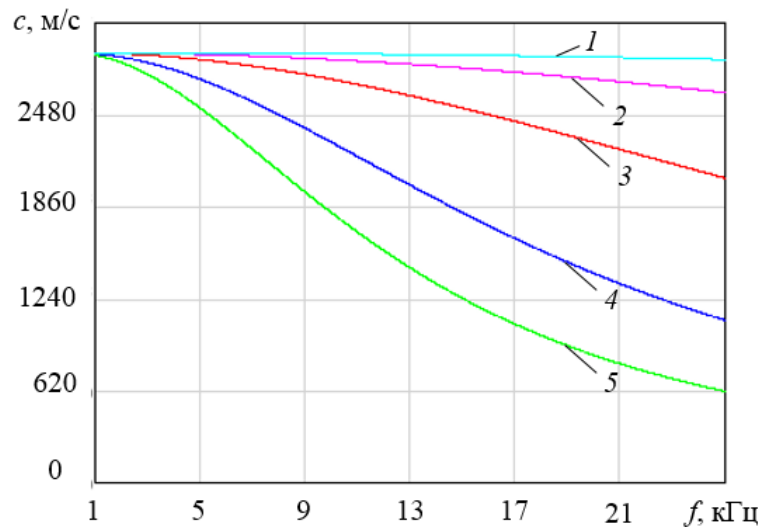


Рисунок 3 – Зависимость скорости распространения волны Лява от частоты

На рисунке 3 кривая 1 соответствует толщине слоя $h = 10$ м, кривая 2 – $h = 25$ м, кривая 3 – $h = 50$ м, кривая 4 – $h = 100$ м, кривая 5 – $h = 150$ м. Результаты анализа свидетельствуют о четкой обратной зависимости между фазовой скоростью волн Лява и частотой. Характер этой зависимости напрямую связан с толщиной слоя – увеличение толщины приводит к более резкому снижению скорости при возрастании частоты. Исключением являются среды с малой толщиной ($h < 25$ м), где скорость демонстрирует слабую дисперсию и сохраняет практически постоянное значение.

Графическая зависимость предельных нижних частот от толщины слоя представлена на рисунке 4.

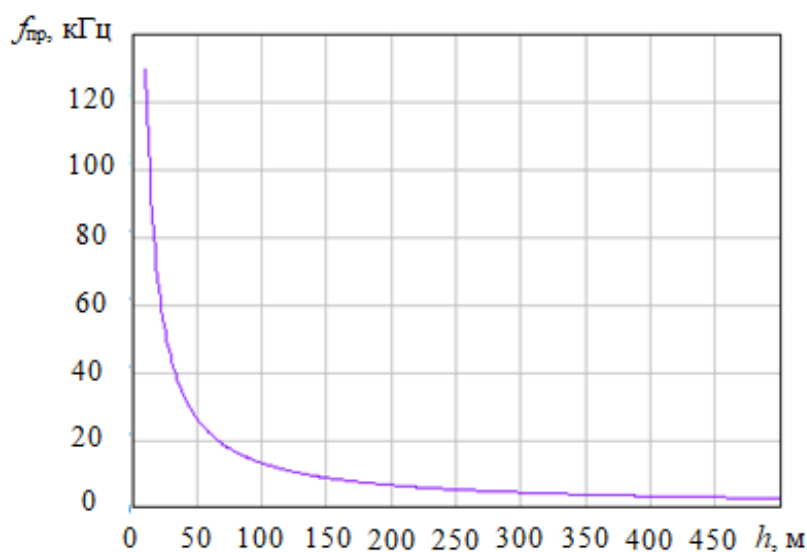


Рисунок 4 – Зависимость предельных нижних частот от толщины слоя

При анализе зависимости, представленной на рисунке 4, отмечается убывающий характер значения предельных частот при увеличении толщины слоя. Применяя

результаты, полученные на рисунке 4 к зависимостям на рисунке 3, получим, что при ограничении зависимостей (рисунок 3) предельными нижними частотами, значения скорости волны Лява будут находиться в асимптотике в диапазоне скоростей поперечных волн в слое ила и скального основания.

Заключение

В работе исследованы волновые процессы при акустическом профилировании донного грунта в однородных слоистых средах.

Рассмотрены волновые процессы при переходе акустической волны из водной среды в донный грунт. Определены коэффициенты отражения, прохождения и трансформации при волновых процессах на границе раздела «вода-грунт». Численно определены коэффициенты по смещению для модели «вода-илистый грунт» при нормальном зондировании и наклонном зондировании (угол падения акустической волны, излучаемой антенной, 30°). При наклонном зондировании коэффициент отражения увеличился на тысячные доли, коэффициент прохождения, наоборот, уменьшился, а коэффициент трансформации повысился на несколько сотых долей.

В рамках исследования изучено распространение волн Лява в модельной слоистой среде «ил – скальное основание». На основе анализа дисперсионного уравнения проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого были построены дисперсионные кривые (зависимости фазовой скорости от частоты). Частотный диапазон выбран в соответствии с рабочими характеристиками донного профилографа.

Результаты моделирования демонстрируют, что с ростом частоты наблюдается монотонное уменьшение фазовой скорости волны Лява. Установлено значительное влияние мощности первого слоя (ила) на характер дисперсии: в более толстых слоях скорость волны снижается более резко. В то же время, для малых толщин слоя в исследуемом частотном диапазоне дисперсионные изменения скорости оказываются незначительными.

Полученные в результате исследования данные могут применяться на практике в задачах акустического профилирования донного грунта.

Список использованных источников

1. Вагин А.В., Воротынцева А.С. Определение упругих характеристик слоистых сред для задач акустического профилирования // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2025. Т. 18, № 5. С. 5-11.
2. Корякин Ю.А., Смирнов С.А., Яковлев Г.В. Корабельная гидроакустическая техника. Состояние и актуальные проблемы: монография. СПб.: Наука, 2004. 410 с.
3. Вагин А.В., Войтов А.А., Волкова А.А. и др. Информационная гидроакустика: методы информационного обеспечения гидроакустическими средствами / под общ. ред. А.Д. Консона. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023. 368 с.
4. Андреева И. Б. Физические основы распространения звука в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 190 с.
5. Воловов В.И. Отражение звука от дна океана. М.: Наука, 1993. – 269 с.
6. Барник В., Вендт Г., Каблов Г. П., Яковлев А. Н. Гидролокационные системы вертикального зондирования дна. Новосибирск: изд. Новосиб. гос. ун-та, 1992. – 217 с.
7. Воловов В.И., Житковский Ю.Ю. Отражение и рассеяние звука дном океана. – В кн.: Акустика океана. М.: Наука, 1974, ч. 6, с. 395-490.

8. Ильин А.В. Основные черты геоморфологии дна Атлантического океана // Океанологические исследования. 1971. Т. 21, С. 107-246.
9. Луньков А.А., Григорьев В.А., Петников В.Г. Акустические характеристики морского дна и их влияние на дальнейшее распространение звука на арктическом шельфе // Успехи физ. наук. 2024. Т. 194, № 2. С. 184–207.
10. Коновалов Р.С. Распространение волны Лява вдоль поверхности пакового льда // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2015. № 10. С. 74-77.
11. Егоров Н.Н., Яковлев Л.А. Колебания и волны: учеб. пособие. СПб.: ГЭТУ, 1997. 111 с.
12. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
13. Вагин А.В., Воротынцева А.С. Волновые процессы в средах с цилиндрическими поверхностями при условии жесткого контакта // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 2. С. 186-194.
14. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. изд. стереотип., 2020. 216 с.
15. Вагин А.В., Воротынцева А.С. Волновые процессы в средах с цилиндрическими поверхностями при условии нежесткого контакта // Noise Theory and Practice. 2024. Т. 10, № 3. С. 11-26.
16. Вагин А.В. Распространение волн Лява в плоском слоистом полупространстве при нежестком контакте на границах // Дефектоскопия. 2022. № 11. С. 3-13.
17. Вагин А.В., Воротынцева А.С. Гидроакустическое устройство профилирования донного грунта с синтезированной апертурой // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2023. Т. 26, № 1. С. 78-86.

References

1. Vagin A.V., Vorotyntseva A.S. Determination of the elastic characteristics of layered media for problems of acoustic profiling // Izvestiya SPbGETU "LETI". 2025. Vol. 18, N. 5. -P. 5-11.
2. Koryakin Yu.A., Smirnov S.A., Yakovlev G.V. Shipborne Hydroacoustic Equipment: State of the Art and Current Problems: Monograph. St. Petersburg: Nauka, 2004. - 410 p.
3. Vagin A.V., Voitov A.A., Volkova A.A., et al. Information Hydroacoustics: Methods of Information Support by Hydroacoustic Means / ed. by A.D. Konsov. St. Petersburg: Publishing House of SPbGETU "LETI", 2023. - 368 p.
4. Andreeva I.B. Physical Fundamentals of Sound Propagation in the Ocean. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1975. - 190 p.
5. Volovov V.I. Sound Reflection from the Ocean Bottom. Moscow: Nauka, 1993. - 269 p.
6. Barnik V., Wendt G., Kablov G.P., Yakovlev A.N. Sonar Systems for Bottom Vertical Sounding. Novosibirsk: Novosibirsk State University Publishing House, 1992. - 217 p.
7. Volovov V.I., Zhitkovskii Yu.Yu. Reflection and scattering of sound by the ocean bottom. In: Ocean Acoustics. Moscow: Nauka, 1974, Part 6. - P. 395-490.
8. Ilyin A.V. Main features of the Atlantic Ocean floor geomorphology // Oceanological Research, 1971. Vol. 21. - P. 107-246.
9. Lunkov A.A., Grigoriev V.A., Petnikov V.G. Acoustic characteristics of the sea bottom and their influence on long-range sound propagation in the Arctic shelf // Physics-USpekhi. 2024. Vol. 194, N. 2. - P. 184–207.

-
10. Konovalov R.S. Propagation of a Love wave along the pack ice surface // *Izvestiya SPbGETU "LETI"*, 2015. N. 10. - P. 74-77.
 11. Egorov N.N., Yakovlev L.A. Oscillations and Waves: Textbook. St. Petersburg: GETU, 1997. - 111 p.
 12. Viktorov I.A. Sonic Surface Waves in Solids. Moscow: Nauka, 1981. - 287 p.
 13. Vagin A.V., Vorotyntseva A.S. Wave processes in media with cylindrical surfaces under the condition of rigid contact // *Journal of Instrument Engineering*, 2024. Vol. 67, N. 2. - P. 186-194.
 14. Rekach V.G. Guide to Solving Problems in the Theory of Elasticity. Stereotype edition, 2020. - 216 p.
 15. Vagin A.V., Vorotyntseva A.S. Wave processes in media with cylindrical surfaces under the condition of non-rigid contact // *Noise Theory and Practice*, 2024. Vol. 10, N. 3. - P. 11-26.
 16. Vagin A.V. Propagation of Love waves in a plane-layered half-space with non-rigid contact at the boundaries // *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2022. N. 11. - P. 3-13.
 17. Vagin A.V., Vorotyntseva A.S. Hydroacoustic device for bottom sediment profiling with synthetic aperture // *Journal of Russian Universities. Radioelectronics*, 2023. Vol. 26, N. 1. - P. 78-86.